Docência da Matemática no Ensino Superior

Coordenação

Carla Fidalgo

Coleção

Estratégias de Ensino e Sucesso Académico:
Boas Práticas no Ensino Superior

Docência da Matemática no Ensino Superior

Docência da Matemática no Ensino Superior

Coordenação

Carla Fidalgo

Coimbra, 2021

Coleção
Estratégias de Ensino e Sucesso Académico:
Boas Práticas no Ensino Superior
Coord. da Coleção: Susana Gonçalves

Comissão editorial da coleção
Helena Almeida, Paula Fonseca, Susana Gonçalves,
Cândida Malça, Fátima Neves, Carlos Dias Pereira e Marco Veloso

Vol. 9 Docência da Matemática no Ensino Superior
Coord. Carla Fidalgo

Revisão de Textos
João Ricardo Branco, Carla Fidalgo e Luis Margalho

ISBN: 978-989-54520-6-4 (impresso)
ISBN: 978-989-54520-7-1 (ebook)

Paginação, grafismo e capa: CINEP | Isabel Santareno

Foto da capa: Susana Gonçalves

Impressão: E-Comunicar

Depósito Legal:

www.cinep.ipc.pt

Coleção
Estratégias de Ensino e Sucesso Académico:
Boas Práticas no Ensino Superior

Volumes Publicados
Vol. 1 Pedagogia no Ensino Superior
Coord. Susana Gonçalves, Helena Almeida, Fátima Neves

Vol. 2 Inovação no Ensino Superior
Coord. Susana Gonçalves, Paula Fonseca, Cândida Malça

Vol. 3 Ambientes Virtuais no Ensino Superior
Coord. Susana Gonçalves, Carlos Dias Pereira, Marco Veloso

Vol. 4 eLearning no Ensino Superior
Coord. J. António Moreira e Cristina Pereira Vieira

Vol. 5 Cooperação entre a Comunidade e o Ensino Superior
Coord. Silvino Capitão e Emília Bigotte

Vol. 6 Estudantes não-tradicionais no Ensino Superior
Coord. António Fragoso e Sandra T. Valadas

Vol. 7 Diversidade no Ensino Superior
Coord. Susana Gonçalves e José Joaquim Costa

Vol. 8 Pedagogias Digitais no Ensino Superior
Coord. Sara Dias-Trindade, J. António Moreira e António Gomes Ferreira

Vol. 9 Docência da Matemática no Ensino Superior
Coord. Carla Fidalgo

Índice

Prefácio

Como ensinamos matemática? Como apoiamos os nossos estudantes? Como os motivamos? Como os avaliamos? Ensinar é também um processo de aprendizagem, enquanto ensinamos, aprendemos. De cada vez que assumimos a coordenação de uma unidade curricular fazemos o melhor para alargar os conhecimentos dos alunos e os nossos ao mergulharmos na aprendizagem de novas abordagens para entusiasmar os alunos a aprenderem. O que sonhamos é que eles sejam ávidos de conhecimento, mas quando lecionamos matemática esta avidez nem sempre é muito visível. Assim, desdobramo-nos nuns e noutros esforços, na esperança de encontrar o método ideal. E se o que aplicámos não tiver sido o tal, abraçaremos outros com a mesma perseverança e dedicação, uma e outra vez. Fazemo-lo com a alegria e a curiosidade de quem o faz pela primeira vez, esquecendo as tentativas menos bem-sucedidas e acreditando que o futuro irá agora estar a nosso favor e a favor daqueles que precisam de aprender matemática.

Nas páginas deste livro graças à contribuição dos autores, a quem muito agradeço, podemos inspirar-nos nas várias metodologias usadas para melhor ensinar matemática na Irlanda, Reino Unido, Espanha e em Portugal, quer na universidade quer no politécnico.

No Capítulo I, os autores E. Ní Fhloinn e M. Carr falam-nos dos centros de apoio à matemática. Nestes centros o apoio é gratuito e constitui uma ajuda adicional dentro do estabelecimento de ensino superior que o aluno frequenta. Esta forma de apoio tornou-se comum no Reino Unido e na Irlanda, tendo-se espalhado em menor escala por outros países europeus, tais como Portugal, Noruega e Suíça, e o seu formato difere de instituição para instituição. Neste capítulo, falam da história dos centros de apoio à matemática, reveem a literatura existente nesta área e propõe possíveis caminhos a seguir.

No Capítulo seguinte os autores E. Bigotte et al. referem que as dificuldades dos alunos de engenharia nas disciplinas de matemática, conducentes a uma elevada taxa de insucesso e à desmotivação dos intervenientes no processo educativo os leva à constante autorreflexão sobre as estratégias adequadas para se adaptarem à heterogeneidade dos conhecimentos dos alunos nesta área. O Centro de Apoio à Matemática na Engenharia (CeAMatE), estrutura implementada no Instituto Superior de Engenharia de Coimbra, que presta apoio aos estudantes, ao nível dos conhecimentos básicos em matemática, essenciais para uma plena integração nas licenciaturas de engenharia resulta dessas reflexões. Neste capítulo descrevem a metodologia de diagnóstico, encaminhamento e avaliação aplicada no CeAMatE.

Segue-se a abordagem de Seabra et al. utilizada em unidades curriculares da área da matemática do 1º e 2º ano dos cursos de Ciências e Engenharia, que resulta da ligação entre três projetos de utilização de tecnologias no ensino, MEGUA, SIACUA e PmatE, da Universidade de Aveiro. O projeto MEGUA (Mathematics Exercise Generator, University of Aveiro) tem por principal objetivo a criação e partilha de conteúdos parametrizados entre autores, o projeto SIACUA (Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador da Universidade de Aveiro) visa a criação de sistemas informáticos com interação e feedback de apoio ao estudo autónomo e o projeto PmatE que é usado como uma plataforma de avaliação, com os conteúdos criados quer na plataforma MEGUA quer no próprio PmatE (modelos geradores de questões). No estudo apresentado os autores concluem que os estudantes consideram que o material resultante destes projetos é útil para a sua aprendizagem.

A autora S. Gaspar Martins fala-nos sobre a utilização de mini-testes no Moodle para melhorar a aprendizagem. Nesta abordagem estiveram disponíveis mini-testes semanais online no Moodle que não eram gerados aleatoriamente e podiam ser submetidos as vezes que os alunos quisessem sem penalização. Eram opcionais e só contavam 10% da nota se os alunos obtivessem mais de 9 em 20 valores na avaliação "tradicional" presencial e têm como objetivo que os alunos estudem, vão acompanhando a matéria e se auto-avaliem. Atendendo às calssificações obtidas nos mini-testes, à adesão e feedback dos alunos autora conclui que esta é uma abordagem positiva e justa e que propicia uma melhor aprendizagem.

C. Steele fala-nos de duas áreas que interferem na educação dos estudantes: más práticas académicas e testes de diagnóstico. Sobre a primeira, a evitar activamente, o autor fala-nos de plágio e originalidade no contexto do ensino e avaliação, do que leva os alunos a plagiar e de como devemos repensar o ensino de modo a minimizar o plágio. Quanto à segunda, o objetivo é que os estudantes possam fazer o diagnóstico dos conhecimentos em matemática e, se necessário, recebam apoio extra para que possam enfrentar o curso com maior confiança. São apresentadas reflexões sobre os métodos e sobre o que fazer com os resultados dos testes.

L. Margalho, consciente de que a educação formal, num reflexo do que tem sucedido na sociedade, tem sofrido alterações no processo de ensino e aprendizagem, o que obriga a repensar a sala de aula, tanto na sua estrutura como na abordagem pedagógica e avaliação e sabendo que nos últimos anos se tem assistido a um grande incremento na utilização de ferramentas computacionais nos diferentes níveis de ensino, apresenta-nos uma análise comparativa de resultados obtidos pelos alunos na avaliação de uma unidade curricular do segundo ciclo do ensino superior (mestrado), com e sem a utilização de ferramentas computacionais.

No capítulo 7 os autores J. A. Rodrigues et al. apresentam-nos uma metodologia complementar e alternativa de ensino e aprendizagem baseada na utilização do método dos elementos finitos para ilustrar modelos matemáticos e explorar as suas soluções numéricas no contexto da compreensão das propriedades do cálculo vetorial. A metodologia é ilustrada através de um conjunto de exemplos centrados em problemas específicos de engenharia, mas o seu âmbito pode ser alargado a outras áreas científicas. Com os exemplos que apresentam concluem que esta abordagem pode ser uma forma interessante de repensar e complementar a perspetiva na transmissão de conceitos matemáticos.

Por fim, sabendo que um dos principais aspetos sociais que caracterizam o século XXI é a profunda mudança nas tecnologias de informação e comunicação e que estas têm grande impacto no que se aprende, como se aprende, quando e onde se aprende, quem aprende e quem ensina, as instituições de ensino superior não permaneceram à margem e utilizam a tecnologia no apoio a atividades de ensino e aprendizagem, não só software específico (programas de cálculo simbólico, calculadoras on-line, sistemas de representação gráfica e simulação, etc.) mas também novas formas de comunicação professor-aluno, desenvolvimento institucional de campus virtuais, cursos on-line, etc. Neste capítulo os autores Susana Nieto-Isidro e Higinio Ramos Calle mostram-nos algumas das suas experiências com o Mathematica, um programa de cálculo simbólico, nas Ciências e Engenharia e referem precauções que devem ser tidas em consideração para tornar mais eficaz o uso deste tipo de sistemas.

Neste livro encontramos exemplos da energia inacabável que temos para procurar a melhor solução. Assim, leiam-no, inspirem-se e corram de braços abertos e com os alunos no coração para a que hoje vos parecer ser a melhor. Amanhã outras inspirações virão…

Capítulo 1

Eabhnat Ní Fhloinn and Michael Carr

Mathematics Learning Support in Higher Education

Mathematics learning support (MLS) is free support offered to students who are studying any form of mathematics in a Higher Education Institution (HEI); support which is available in addition to their standard lectures and tutorials. The need for such support was identified over time in a number of publications, particularly from the UK, Ireland and Australia (e.g. Gill, 2006; Rylands & Coady, 2009; Sutherland & Dewhurst, 1999), due to the significant numbers of first-year students entering HEIs who exhibited weak mathematical backgrounds but still needed to undertake one (or several) mathematics modules (Organisation for Economic Co-operation and Development, 1999; Savage, Kitchen, Sutherland, & Porkess, 2000; Sutherland & Pozzi, 1995). This issue has been labelled the "Mathematics Problem", and a detailed review can be found in Lawson, Croft, & Waller (2012).

MLS strives to provide a solution to the "Mathematics Problem" by supporting students in overcoming any difficulties they might have with mathematics in a relaxed, informal atmosphere (Lawson, Halpin, & Croft, 2001). The most common form of MLS is in-person support, offered on a one-to-one or small group basis (Cronin, Cole, Clancy, Breen, & Ó Sé, 2016; MacGillivray, 2009;

Perkin, Lawson, & Croft, 2012). This usually takes the format of drop-in sessions, whereby students attend whenever they like for as long or short a time as suits them; but some MLS is offered on an appointment basis instead (Barton & Bowers, 2015; Grove, Croft, Lawson, & Petrie, 2018a). The advantage of a drop-in approach is that students can be helped in rotation, with a tutor setting small goals for each student, while they help another student, before returning to assess how the first student is progressing. The difficulty is in timetabling the correct number of tutors for the optimal hours in terms of maximising the support provided, but the best solution for this will often depend on the particularities of the institution involved. However, it seems that of late, in the UK at least, there has been a move towards providing both drop-in and appointment options, possibly for more advanced topics or to allow students a guarantee of assistance (Grove et al., 2018a).

Other forms of MLS offered include workshops on problematic topics; support tutorials, in which the material from regular tutorials is covered at a slower pace; and online supports. The latter is far less widely available than in-person supports, with a recent Irish audit listing online support provision in 48% of institutions who offer MLS (Cronin et al., 2016) and a similar Scottish one reporting figures of 61% (Ahmed et al., 2018). This online support usually consists of websites, an institutional Virtual Learning Environment (VLE) site, links to videos or resources, or formative assessment programmes. Recently, some HEIs have experimented with the provision of one-to-one MLS on an online basis (Breen, O'Sullivan, & Cox, 2016; Grove et al., 2018a; Hawkes & Hodds, 2016), but this approach is largely still in its early stages. Social media is also of late being used by MLS (Voake-Jones, 2016), but primarily for publicity purposes, with MLS services setting up accounts on Facebook, Twitter or Instagram to allow students to check timetables and locations of services.

Growth of mathematics support

In the UK, Ireland, and Australia, there has been particularly widespread growth in the area of MLS over the past twenty years.

This can be tracked through a series of surveys, audits and studies undertaken in each place; although the methodologies and sampling approaches differed considerably, it is clear there is an upward trend throughout in the provision of MLS.

As early as 1994, a survey was sent to 800 Further Education Institutions (FEIs) and HEIs in the UK, of whom 142 (17.75%) responded, all of whom offered some form of MLS at that time (Beveridge & Bhanot, 1994). A similar survey three years later found that drop-in MLS workshops were offered by 56% of the 200 FEI/HEI respondents (Beveridge, 1997). In 2001, 48% of the HEI respondents had MLS (n=95) (Lawson et al., 2001); by 2004, this had risen to 62.3% (where n=106) (Perkin & Croft, 2004); with a further rise to 85% of the 119 HEIs surveyed 8 years later (Perkin et al., 2012). A more detailed review of these developments is available in Lawson, Croft, & Waller (2012).

As far afield as Australia, a similar pattern emerged, with the first MLS-type role identified as early as 1973, and the first two MLS centres established in 1984 (MacGillivray, 2009). By 1999, 46% of Australian HEIs offered MLS drop-in services (12 out of 26) (Taylor, 1999) whereas by 2007, 85% (33 out of 39) of Australian HEIs had some form of MLS (MacGillivray, 2008).

The formal provision of MLS in Ireland started somewhat later, with the first MLS centre opening in the University of Limerick in 2001 (Gill, Mac an Bhaird, & Ní Fhloinn, 2010); however, growth in MLS provision has been rapid and widespread . A detailed account of these early years can be found in Gill, Mac an Bhaird & Ní Fhloinn (2010). However, within seven years, an audit of MLS reported on MLS provision in 13 HEIs in the Republic of Ireland (Gill, O'Donoghue, & Johnson, 2008). Seven years later again, another Irish audit showed MLS provision in 83% (25 of 30 respondents) of HEIs on the island of Ireland, 20 of which were based in the Republic (Cronin et al., 2016).

Several helpful guides to setting up and operating MLS centres have been produced to assist those interested in doing so, based on best practice in the area (Croft, 2000; Croft, Harrison, & Robinson, 2009; Mac an Bhaird & Lawson, 2012). Across Europe, MLS services have also been established in countries such as Portugal (de Almeida & Gomes, 2015), Norway (http://www.matric.no/dropin), Switzerland (http://www.mathematikzentrum.ch/home-en/) and the Czech Republic (http://msc.utb.cz/, http://msc.vsb.cz/, https://mathstat.econ.muni.cz/), although the majority of these are still in their early years of operation, while in New Zealand, a number of HEIs now offer MLS services (e.g. http://mathsfirst.massey.ac.nz/, https://www.math.auckland.ac.nz/en/for/current-students/maths-help.html, https://www.victoria.ac.nz/student-learning/studyhub/maths-and-stats).

National networks and conferences

In parallel with this growth in mathematics support has been the formation and expansion of formal MLS national networks, which promote MLS and run seminars, workshops and conferences encouraging research and best practice in MLS. In 2005, the sigma Centre for Excellence in University-wide Mathematics and Statistics Support was launched as a HEFCE-funded (Higher Education Funding Council for England) Centre for Excellence in Teaching and Learning (CETL), consisting of a combination of the Loughborough and Coventry MLS support services. Together with the MSOR Subject Centre of the Higher Education Academy, they established the CETL-MSOR annual conference series, with the first of these conferences taking place in 2006 (Fletcher, 2013). Subsequently, in 2010, the sigma network was formed, with particular remit for MLS in England and Wales (Croft et al., 2014). The Scottish Mathematics Support Network (SMSN) was set up in 2008 (Ahmed & Durkacz, 2012), at a meeting funded by sigma, and has since gone on to hold annual meetings. The Irish Mathematics Learning Support Network (IMLSN) was formally established in 2009, although the Irish Workshop on Mathematics Learning and Support Centres had been running since 2006 on an annual basis (Mac an Bhaird, Gill, Jennings, Ní Fhloinn, & O'Sullivan, 2011). In recent years, the sigma, SMSN and IMLSN networks have come together to jointly run the CETL-MSOR conference, with it being hosted by a different network each year. In 2018, it ran for the first time outside of England or Wales, when it was held in Glasgow, Scotland (http://www.sigma-network.ac.uk/cetl-msor/cetl-msor-conference-2018/), and in 2019, it will be held in Dublin, Ireland. This co-operation between networks has been a feature of the MLS networks since their inception, and greatly contributes to the sharing of ideas and resources throughout the community. Again, this experience is mirrored in Australia, where the biennial Delta conference (the Southern Hemisphere Symposium on Teaching Undergraduate Mathematics and Statistics) provides a dissemination outlet for those working in MLS provision in the area (MacGillivray & Croft, 2011).

Notable research in mathematics support

The establishment of national MLS networks alongside regular MLS conferences has contributed greatly to the level of research that has been conducted to date in MLS, with evidence of scholarly practice across MLS (Samuels & Patel, 2010). This research has focused on areas such as student usage/non-usage of MLS; student retention/performance; impact of MLS; training of MLS staff; and non-traditional entrants to HEIs. An in-depth discussion of MLS research to-date is beyond the scope of this chapter, so instead we provide a brief overview of the main themes explored, highlighting some of the most influential papers. For a more detailed review, particularly in relation to the evaluation of MLS services, Matthews, Croft, Lawson, & Waller (2013) should be consulted.

Usage of mathematics support

Some of the earliest research in the area of MLS centred around usage of the services, in particular attendance at drop-in services. Many early studies reported the number of unique visits, students, spread of disciplines covered and pattern of visits to show engagement with the service (e.g. Croft, 2000; Ní Fhloinn, 2010; Woodhouse, 2004). Analysis of these patterns of engagement can assist with planning around such issues as the optimal opening hours for the service; the number of tutors needed at various times; and whether additional space is required to facilitate MLS users during busier periods (MacGillivray & Croft, 2011), as well as justifying the existence of MLS by showing student engagement. These studies progressed on to considering which students were using MLS, and found that in many cases, it was not only those at risk of failing who engaged with MLS, but also those who wanted to improve a top grade (Croft & Grove, 2006; MacGillivray, 2009; Patel & Little, 2006; Pell & Croft, 2008). Analysis of an Irish multi-institutional survey showed that female students were almost two and a half times more likely to engage with MLS than male students, while controlling for prior mathematical achievement, degree programme, and HEI attended (Ní Fhloinn, Fitzmaurice, Mac an Bhaird, & O'Sullivan, 2016). Students' reasons for using MLS have also been investigated, with students mentioning upcoming exams/assignments, a need for extra help, a desire to improve their understanding, and the fact that they find mathematics difficult as some of their motivations for attendance (O'Sullivan, Mac an Bhaird, Fitzmaurice, & Ní Fhloinn, 2014).

As well as investigating the usage of MLS, another important focus is on the non-users of MLS services. Ideally, the only non-users of MLS would be those students who do not need to avail of the services. However, it has long been observed that this is not the case (Mac an Bhaird, Fitzmaurice, Ní Fhloinn, & O'Sullivan, 2013) and there remains a cohort of students who do not engage with MLS in any way and subsequently fail their mathematics module. A national survey undertaken in Ireland by the IMLSN found that roughly one-third of the 1,633 respondents had engaged with MLS, another third had not as they felt they did not need to, and a final third had not but may have needed to (O'Sullivan et al., 2014). Symonds (2009) conducted interviews and focus groups with both users and non-users of MLS in an attempt to determine the barriers to MLS usage. She found that those who engage with MLS are generally "well-motivated and cognitively engaged" while non-users who could have benefitted from MLS lacked the motivation to engage. Other barriers to engagement that have been reported include fear (Grehan, Mac an Bhaird, & O'Shea, 2011); unawareness or unwillingness to admit that they have a problem (Grehan, Mac an Bhaird, & O'Shea, 2016); and general problems with MLS structures such as unsuitability of MLS times or locations (Mac an Bhaird et al., 2013).

Student retention and performance

While MLS services aim to provide a partial solution to the "Mathematics Problem", they do of course incur a financial cost to each HEI, primarily in terms of staff costs, but also in terms of space and resources. However, these costs pale in comparison with the loss of revenue incurred by HEIs by students dropping out in the first year of their undergraduate programme (Faulkner, Hannigan, & Fitzmaurice, 2014). The justification for MLS is both moral and financial: if students are accepted into a HEI, there should be a reasonable expectation that they will be able to be successful in their studies, should they use the supports available to them; and students who drop out or fail to progress in their studies represent a loss of revenue to any HEI. Research into the effectiveness of MLS has been ongoing by MLS practitioners, but often with a focus (either direct or indirect) upon retention. It can be very difficult to determine whether MLS was the key reason behind the retention of any given student (Ní Fhloinn, 2010). However, the national survey undertaken by the IMLSN (which asked students directly about retention) found that 22% of respondents who had availed of MLS had considered dropping out of their degree programme due to difficulties with mathematics, and almost two thirds of these cited MLS as having had a positive impact upon their retention (O'Sullivan et al., 2014). In addition, sigma have produced a guide specifically aimed at Pro-Vice-Chancellors in the UK, outlining the benefits of MLS and highlighting the related research in this area (Croft, Grove, & Lawson, 2016), as the financing of MLS services is an ongoing challenge for many practitioners.

Another approach to improve student retention through MLS involves diagnostic testing, with supports put in place for those students deemed to be "at-risk" as a result (LTSN MathsTEAM Project, 2003). Such diagnostic testing is not always undertaken by MLS services, but commonly they are linked, with students recommended to engage with MLS at an early stage if they score low on the test (Carr, Murphy, Bowe, & Ní Fhloinn, 2013; Robinson & Croft, 2003). While such diagnostic testing has also provided practitioners with a benchmark of mathematical proficiency over time (Faulkner, Hannigan, & Gill, 2010; Gill, O'Donoghue, Faulkner, & Hannigan, 2010; Lawson, 2003; Treacy & Faulkner, 2015), there has been evidence to suggest that students also find the process useful (Ní Fhloinn, Mac an Bhaird, & Nolan, 2014).

In addition to improving student retention, studies have also been undertaken in relation to the impact of MLS upon student examination performance (Hillock, Jennings, Roberts, & Scharaschkin, 2013; Lee, Harrison, Pell, & Robinson, 2008; Rylands & Shearman, 2018), showing overall improved performance among those who engaged with MLS. The IMLSN study mentioned above reported 56% of respondents who had used MLS thought it had some or a large impact upon their subsequent examination performance (Ní Fhloinn et al., 2014), with students mentioning improved grades and better understanding. In the case of students considered to be "at-risk" of failing their mathematics module, those who engaged with MLS did better on average than those who did not (Berry, Mac An Bhaird, & O'Shea, 2015; Gallimore & Stewart, 2014). More recently, Jacob and Ní Fhloinn (2018) studied MLS data in an Irish HEI over the past 12 years and used binary logistic regression to show that, when prior mathematical achievement and module studied were kept constant, the odds of a student who engaged with MLS once passing their module were 1.63 times higher than for one who had never engaged; and for those who attended 15 or more times, the odds were almost 14 times higher.

Impact of mathematics support

In addition to performance and retention, the impact of MLS upon the students who engage with the services is another large area of research. When researching impact in relation to MLS, "there is a danger of confusing impact with student satisfaction" (Green, 2012, p.3), although student satisfaction with the service is also a key issue, as this will impinge upon usage. As a result, although many MLS services issue regular student surveys to gauge student satisfaction, many researchers have gone further than this in the study of impact. A number of recent studies, for example, have investigated mathematical confidence for users of MLS (Dzator & Dzator, 2018; Gillard, Robathan, & Wilson, 2012; Ní Fhloinn, Fitzmaurice, et al., 2014; Wilkins, 2015), all finding self-reported improved confidence levels for students after engaging with MLS. Another study showed that 65% of respondents felt MLS helped them to cope better with the mathematical demands of their overall course (Ní Fhloinn, Fitzmaurice, et al., 2014). MLS has also been shown to help students to overcome previous negative experiences and perceptions of mathematics (Nzekwe-Excel, 2010), and to help them with their approach to study (Carroll & Gill, 2012). An innovative, qualitative study conducted with 2nd and 3rd year mathematics students engaged with MLS considered the manner in which MLS developed a "social learning space" for these students, rich with peer support (Solomon, Croft, & Lawson, 2010).

MLS staff and training challenges

Recruiting and training MLS tutors is an outstanding challenging for those involved in MLS. Those who tutor in MLS come from a variety of backgrounds: in Ireland, 48% of MLS services use postgraduate students as tutors; 36% use undergraduates; and 72% had at least one full-time academic staff member working as a tutor (Cronin et al., 2016); in Scotland, the corresponding figures are 61% using postgraduates, 8% undergraduates and 69% using full-time academic staff (Ahmed et al., 2018); while in England/Wales, the most recent figures suggest 49% using postgraduate tutors, 12% using undergraduates, and almost 90% using full-time academic staff (Grove et al., 2018b). Attempts have been made to standardise the training process for MLS tutors in recent years, particularly through the sigma, SMSN and IMLSN networks (e.g. Croft et al., 2013; Fitzmaurice, Cronin, Ní Fhloinn, O'Sullivan, & Walsh, 2016; Pfeiffer, Cronin, & Mac an Bhaird, 2016). These initiatives have generally consisted of standardised tutor training workshops being offered in different locations, open to any MLS tutors from any institution. These can be of particular benefit to those in smaller institutions, where training opportunities may otherwise be limited. Sigma have also produced a detailed guide on tutor training, highlighting best practice in this area (Croft et al., 2011). Recent research has shown the importance of such training, by highlighting the issues that can arise when MLS tutors do not have a background in education (Walsh, 2017).

Non-traditional students and MLS

Research in the area of MLS has also focused on those non-traditional entrants to HEIs who may need particular support, such as mature students or students with accessibility issues. The definition of "mature student" can differ slightly between countries (e.g. over 21 in the UK; over 23 in Ireland), but in general, this term refers to students who enter HEIs at an older age than is traditional, and not directly from school. An Irish study found that a statistically significant higher proportion of mature students engaged with MLS when compared with traditional students (62% vs 32%) (Fitzmaurice, Mac an Bhaird, Ní Fhloinn, & O'Sullivan, 2016). Mature students stressed their desire to understand the material (Breen, Prendergast, & Carr, 2015; Ní Fhloinn, 2008) and how the one-to-one nature of MLS assisted greatly with this (Breen, Prendergast, & Carr, 2015), and that they changed their study habits as a result of MLS, approaching study with the right attitude (Dzator & Dzator, 2018).

Another group of non-traditional entrants that frequent MLS services are students with accessibility issues, for example dyslexia, dyscalculia, autistic spectrum disorder or AD(H)D, among others. From 2003, the Dyslexia and Dyscalculia Interest Group (DDIG) (http://www.lboro.ac.uk/departments/mec/activities/maths-statistics-support/thedyscalculiaanddyslexiainterestgroup) based within the Mathematics Education Centre in Loughborough University brought MLS practitioners with an interest in special learning difficulties together with disability support staff with an interest in mathematics. A number of articles appeared in MSOR Connections in particular, to disseminate research in this area among practitioners, addressing areas such as creating accessible web forms, mathematical equations in Braille, and providing MLS for dyslexic students (e.g. Beacham & Trott, 2005; Ford, 2002; Maddox, 2007; Rowlett & Wright, 2005; Trott, 2003). In 2012, a good practice guide for accessibility issues in mathematical sciences was produced (Cliffe & Rowlett, 2012), although the focus was not specifically on MLS. In 2016, sigma established a Special Interest Group (SIG) on accessibility, who undertook a survey of current awareness of accessibility issues within MLS (Cliffe, Mac an Bhaird, Ní Fhloinn, & Trott, 2019) and are creating a suite of resources for MLS practitioners,to assist them with students presenting with the most common accessibility issues (Cliffe, Mac an Bhaird, Ní Fhloinn, & Trott, 2018)."

Possible future directions for mathematics support

The mathematics support community is continuing to adapt and improve their services with the aim of providing the optimum support to as many students as possible. As a result, there are a number of research movements within the community that may influence future trends in the area. One area which appears likely to come to the fore is that of providing online mathematics support in as effective a means as possible. This area is under-researched as of yet, with the majority of MLS services not also providing an online one-to-one support element, but there is a growing interest in the field (Cronin & Breen, 2015). Online support is not without its challenges, as outlined by the experience in Coventry University (Hawkes & Hodds, 2016; Hodds & Xu, 2018), where take-up of their pilot "around-the-clock" online MLS support was disappointingly low. However, when striving to engage those students who need MLS but do not currently attend, movements towards online provision may attract some of these students into MLS, as well as providing practical solutions for multi-campus HEIs.

In addition, the establishment of Statistics Advisory Services (SAS) have become more widespread in recent years (Patel, De Jager, & Zou, 2010). Some of the demands of statistics support differ from those of MLS: for example, in the University of Sheffield, they found that most requests for statistics support related to carrying out an analysis for a project, rather than on specific skills as might be requested in MLS (Patel et al., 2010), and as such, SAS is usually provided on an appointment basis in addition to standard MLS services (Owen, Samuels, Wrightham, Leckenby, & Gilchrist, 2011; Samuels & Gibson, 2013). Sigma has recently established a SIG for statistics support, bringing together researchers and practitioners in the field to ensure wider dissemination of their expertise. In addition, this SIG will maintain and develop statstutor (www.statstutor.ac.uk), a free online resource including videos and paper-based resources for statistics support (Owen, Green, Petrie, Davis, & Marriott, 2010). Bringing together both the online element and SAS, Owen et al reported on an initiative where a number of HEIs came together to provide an online SAS across the HEIs, as a means of providing SAS without incurring the full costs of a service for an individual HEI (Owen et al., 2011). It is likely that SAS will continue to expand in the coming years, as demand for their services continues to grow.

A sigma-commissioned report on senior management perspectives on MLS highlighted the benefits of national and international collaboration and networking in relation to the provision of effective supports (Tolley & Mackenzie, 2015). This has always been a feature of MLS provision to date, and it is hoped it will continue thus in the coming years, in order to go on promoting mathematical literacy among undergraduate students; assisting them to achieve their potential mathematically; and improving attitudes towards and experiences of mathematics.

References

Ahmed, S., Davidson, P., Durkacz, K., Macdonald, C., Richard, M., & Walker, A. (2018). *The Provision of Mathematics and Statistics Support in Scottish Higher Education Institutions (2017)* – A Comparative Study by the Scottish Mathematics Support Network. MSOR Connections, 16(3), 5–19.

Ahmed, S., & Durkacz, K. (2012). *The Scottish Mathematics Support Network.* MSOR Connections, 12(2), 42–44.

Barton, C., & Bowers, D. (2015). *Appointment booking – how* *does your institution do it?* Sigma Centre for Excellence in Mathematics and Statistics Support: University of Surrey. Retrieved from http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2015/07/Appointment-booking-methods-report.pdf

Beacham, N., & Trott, C. (2005). *Screening for Dyscalculia within HE.* MSOR Connections, 5(1). https://doi.org/10.11120/msor.2005.05010004

Berry, E., Mac An Bhaird, C., & O'Shea, A. (2015). *Investigating relationships between the usage of Mathematics Learning Support and performance of at-risk students.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 34(4), 194–204. https://doi.org/10.1093/teamat/hrv005

Beveridge, I. (1997). *Survey: Learning Support for Mathematics in FE and HE. Mathematics Support Newsletter*, (6), 20–23.

Beveridge, I., & Bhanot, R. (1994). *Maths Support Survey: An Examination of Maths Support in Further and Higher Education.* Mathematics Support Newsletter, (1), 13.

Breen, C., O'Sullivan, C., & Cox, D. (2016). *Mathematics Learning Support across a Multi-Campus Institution: A Prototype of Virtual Support.* MSOR Connections, 14(2), 8–15.

Breen, C., Prendergast, M., & Carr, M. (2015). *Investigating the engagement of mature students with mathematics learning support.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 34(1), 16–25. https://doi.org/10.1093/teamat/hru027

Carr, M., Murphy, E., Bowe, B., & Ní Fhloinn, E. (2013). *Addressing continuing mathematical deficiencies with advanced mathematical diagnostic testing.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 32(2), 66–75. https://doi.org/10.1093/teamat/hrt006

Carroll, C., & Gill, O. (2012). A*n innovative approach to evaluating the University of Limerick's Mathematics Learning Centre.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 31(4), 199–214. https://doi.org/10.1093/teamat/

hrs008

Cliffe, E., Mac an Bhaird, C., Ní Fhloinn, E., & Trott, C. (2018). *Sigma Accessibility SIG: Manager and Tutor Resources.* Presented at the CETL-MSOR Conference 2018, University of Glasgow. Retrieved from http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2018/08/CETL-MSOR-2018-Abstract-Booklet.pdf

Cliffe, E., Mac an Bhaird, C., Ní Fhloinn, E., & Trott, C. (2019). *Mathematics Instructors' Awareness of Student Accessibility. Issues.* Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 39(3), 184-200. http://doi.org/10.1093/teamat/hrz012

Croft, T. (2000). *A guide to the establishment of a successful mathematics learning support centre.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(3), 431–446.

Croft, T., Ahmed, S., Aiken, V., Fletcher, L., Grove, M., Mead, A., Patel, C. & Wilson, R. (2013). *Offering Training to Postgraduates who.* Tutor in Mathematics Support Centres: (Report of a workshop held on Monday 23 July 2012, University of Birmingham, UK). MSOR Connections, 13(1), 3–7. https://doi.org/10.11120/msor.2013.13010003

Croft, T., Gillard, J., Grove, M., Kyle, J., Owen, A., Samuels, P., & Wilson, R. (2011). *Tutoring in a mathematics support centre: a guide for postgraduate students.* Sigma Centre for Excellence in Mathematics and Statistics Support: University of Birmingham. Retrieved from http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2012/11/46836-Tutoring-in-MSC-Web.pdf

Croft, T., & Grove, M. (2006). *Mathematics support: Support for the specialist mathematician and the more able student.* MSOR CONNECTIONS, 6(2), 39–44.

Croft, T., Grove, M., & Lawson, D. (2016). T*he oversight of mathematics, statistics and numeracy support provision at university level: A guide for Pro-Vice-Chancellors.* Sigma Centre for Excellence in Mathematics and Statistics Support: Loughborough University. Retrieved from http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2016/10/66141-Senior-Management-

Handbook-AWK-WEB.pdf

Croft, T., Harrison, M. C., & Robinson, C. L. (2009). *Recruitment and retention of students–an integrated and holistic vision of mathematics support.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(1), 109–125. https://doi.org/10.1080/00207390802542395

Croft, T., Lawson, D., Hawkes, T., Grove, M., Bowers, D., & Petrie, M. (2014). *Sigma - a networking working! Mathematics Today-Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 50(1).

Cronin, A., & Breen, C. (2015). *Maximizing the impact of digital supports in Mathematics Learning Support in Higher Education* – An overview of the 9th Annual IMLSN Workshop. MSOR Connections, 14(1), 11-17–17.

Cronin, A., Cole, J., Clancy, M., Breen, C., & Ó Sé, D. (2016). *An audit of Mathematics Learning Support provision on the island of Ireland in 2015* (Irish Mathematics Learning Support Network (IMLSN) Report No. 2). Dublin: National Forum for the Enhancement of Teaching and Learning in Higher Education. Retrieved from https://www.ucd.ie/t4cms/msc_an_audit_of_mathematics_learning_support_provision_on_the_island_of_ireland_in_2015.pdf

de Almeida, M. E. B., & Gomes, A. (2015). *The CeAMatE-on project: An online mathematical Support Centre in engineering*. In 2015 International Symposium on Computers in Education (SIIE) (pp. 81–85). https://doi.org/10.1109/SIIE.2015.7451653

Dzator, M., & Dzator, J. (2018). *The impact of Mathematics and Statistics Support at the Academic Learning Centre, Central Queensland University.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA. https://doi.org/10.1093/teamat/hry016

Faulkner, F., Hannigan, A., & Fitzmaurice, O. (2014). *The role of prior mathematical experience in predicting mathematics performance in higher education.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(5), 648–667. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.868539

Faulkner, F., Hannigan, A., & Gill, O. (2010). *Trends in the mathematical competency of university entrants in Ireland by leaving certificate mathematics grade.* Teaching Mathematics and Its Applications, 29(2), 76–93.

Fitzmaurice, O., Cronin, A., Ní Fhloinn, E., O'Sullivan, C., & Walsh, R. (2016). P*reparing Tutors for Mathematics Learning Support.* MSOR Connections, 14(3), 14–21. https://doi.org/10.21100/msor.v14i3.307

Fitzmaurice, O., Mac an Bhaird, C., Ní Fhloinn, E., & O'Sullivan, C. (2016). *Adult Learners and Mathematics Learning Support*. Adults Learning Mathematics: An International Journal, 11(1), 7–20.

Fletcher, L. (2013). *The Mathematics Support Community of Practice: A report of the achievements of sigma within the National HE STEM Programme*. Retrieved from http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2013/03/report-1.pdf

Ford, K. (2002). *Have you seen this?: SENDA 2001 and DDA 1995 Legislation checklist — Implications for Further and Higher Education.* MSOR Connections, 2(4), 7–8. https://doi.org/10.11120/msor.2002.02040006

Gallimore, M., & Stewart, J. (2014). *Increasing the impact of mathematics support on aiding student transition in higher education.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 33(2), 98–109. https://doi.org/10.1093/teamat/hru008

Gill, O. (2006). *What Counts as Service Mathematics?: An Investigation Into the'mathematics Problem'in Ireland*. University of Limerick.

Gill, O., Mac an Bhaird, C., & Ní Fhloinn, E. (2010). *The origins, development and evaluation of mathematics support services.* Irish Mathematical Society Bulletin, 66(2), 51–63.

Gill, O., O'Donoghue, J., Faulkner, F., & Hannigan, A. (2010). *Trends in performance of science and technology students (1997–2008) in Ireland*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(3), 323–339.

Gill, O., O'Donoghue, J., & Johnson, P. (2008). *An Audit of Mathematical Support Provisions in Irish Third Level Institutes*. Regional Centre for Excellence in Mathematics Teaching and Learning (CEMTL): University of Limerick. Retrieved from https://www3.ul.ie/cemtl/pdf%20files/FullAudit.pdf

Gillard, J., Robathan, K., & Wilson, R. (2012). *Student perception of the effectiveness of mathematics support at Cardiff University.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 31(2), 84–94. https://doi.org/10.1093/teamat/hrs006

Green, D. (2012). *Gathering student feedback on mathematics and statistics support provision: a guide for those running mathematics support centres.* Sigma Centre for Excellence in Mathematics and Statistics Support: Loughborough University. Retrieved from http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2012/11/Evaluation-Report-web-version.pdf

Grehan, M., Mac an Bhaird, C., & O'Shea, A. (2011). *Why do students not avail themselves of mathematics support?* Research in Mathematics Education, 13(1), 79–80.

Grehan, M., Mac an Bhaird, C., & O'Shea, A. (2016). *Investigating students' levels of engagement with mathematics: critical events, motivations, and influences on behaviour.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47(1), 1–28. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1050706

Grove, M., Croft, T., Lawson, D., & Petrie, M. (2018a). *Community perspectives of mathematics and statistics support in higher education: building the infrastructure.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 37(4), 171–191. https://doi.org/10.1093/teamat/hrx014

Grove, M., Croft, T., Lawson, D., & Petrie, M. (2018b). *Community perspectives of mathematics and statistics support in higher education: the role of the staff member.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA. https://doi.org/10.1093/teamat/hrx017

Hawkes, T., & Hodds, M. (2016). *HowCloud: Round-the-Clock*

Maths Support. MSOR Connections, 14(2), 3-7–7.

Hillock, P. W., Jennings, M., Roberts, A., & Scharaschkin, V. (2013). *A mathematics support programme for first-year engineering students.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(7), 1030–1044. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.823251

Hodds, M., & Xu, A. (2018). *Reviewing Coventry University's Mathematics Support Centre 2016-17: Ideas and Inspiration*. MSOR Connections, 16(3), 20-30–30.

Jacob, M., & Ní Fhloinn, E. (2018). *A quantitative, longitudinal analysis of the impact of mathematics support in an Irish university.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA. https://doi.org/10.1093/teamat/hry012

Lawson, D. (2003). *Changes in student entry competencies 1991–2001.* Teaching Mathematics and Its Applications, 22(4), 171–175.

Lawson, D., Croft, T., & Waller, D. (2012). *Mathematics support past, present and future.* Presented at the Innovation, Practice and Research in Engineering Education (EE2012), Loughborough University. Retrieved from http://cede.lboro.ac.uk/ee2012/papers/ee2012_submission_179_gp.pdf

Lawson, D., Halpin, M., & Croft, T. (2001). *After the diagnostic test: What next?* Evaluating and enhancing the effectiveness of mathematics support centres. MSOR Connections, 1(3), 19–23.

Lee, S., Harrison, M. C., Pell, G., & Robinson, C. L. (2008). *Predicting performance of first year engineering students and the importance of assessment tools therein.* Engineering Education: A Journal of the Higher Education Academy, 3(1), 44–51.

LTSN MathsTEAM Project. (2003). *Diagnostic testing for mathematics.*

Mac an Bhaird, C., Fitzmaurice, O., Ní Fhloinn, E., & O'Sullivan, C. (2013). *Student non-engagement with mathematics learning supports.* Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 32(4), 191–205. https://doi.org/10.1093/teamat/hrt018

Mac an Bhaird, C., Gill, O., Jennings, K., Ní Fhloinn, E., & O'Sullivan, C. (2011). *The Irish mathematics support network: its origins and progression.* AISHE-J: The All Ireland Journal of Teaching and Learning in Higher Education, 3(2), 51.1-51.14.

Mac an Bhaird, C., & Lawson, D. (2012). *How to set up a mathematics and statistics support provision.* Sigma Centre for Excellence in Mathematics and Statistics Support: Coventry University. Retrieved from http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2012/11/51691-How-to-set-up...final_.pdf

MacGillivray, H. (2008). *Learning Support in Mathematics and Statistics in Australian Universities: A guide for the university sector.* New South Wales: Australian Teaching and Learning Council. Retrieved from http://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/guide--altc-learning-support-in-maths-and-stats.pdf

MacGillivray, H. (2009). *Learning support and students studying mathematics and statistics.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(4), 455–472.

MacGillivray, H., & Croft, T. (2011). *Understanding evaluation of learning support in mathematics and statistics.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42(2), 189–212.

Maddox, S. (2007). *Mathematical equations in Braille*. MSOR Connections, 7(2), 45–48. https://doi.org/10.11120/msor.2007.07020045

Matthews, J., Croft, T., Lawson, D., & Waller, D. (2013). *Evaluation of mathematics support centres: a review of the literature*. Teaching Mathematics and Its Applications, 32(4), 173–190. https://doi.org/10.1093/teamat/hrt013

Ní Fhloinn, E. (2008). *Assisting adult learners within a Maths Learning Centre (pp. 233–240).* Presented at the Proceedings of the 14th International Conference of Adult Learning Mathematics (ALM), Adults Learning Mathematics (ALM) – A Research Forum.

Ní Fhloinn, E. (2010). *The role of student feedback in evaluating* *mathematics support centres.* In David Green (Ed.), Proceedings of CETL-MSOR Conference 2009 (pp. 94–98). Milton Keynes, UK: The Maths, Stats & OR Network. Retrieved from http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2016/11/CETL-MSOR-Proceedings2009.pdf

Ní Fhloinn, E., Fitzmaurice, O., Mac an Bhaird, C., & O'Sullivan, C. (2014). *Student perception of the impact of mathematics support in higher education.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(7), 953–967. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.892161

Ní Fhloinn, E., Fitzmaurice, O., Mac an Bhaird, C., & O'Sullivan, C. (2016). *Gender Differences in the Level of Engagement with Mathematics Support in Higher Education in Ireland*. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2(3), 297–317. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0031-4

Ní Fhloinn, E., Mac an Bhaird, C., & Nolan, B. (2014). *University students' perspectives on diagnostic testing in mathematics.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(1), 58–74. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790508

Nzekwe-Excel, C. (2010). *Role of Mathematics Learning Development Centres in HEIs.* International Journal for Mathematics Teaching & Learning, 223–229.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (1999). *Measuring student knowledge and skills: a new framework for assessment.* Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development.

O'Sullivan, C., Mac an Bhaird, C., Fitzmaurice, O., & Ní Fhloinn, E. (2014). *An Irish Mathematics Learning Support Network (IMLSN) Report on Student Evaluation of Mathematics Learning Support: Insights from a large scale multi-institutional survey.* Limerick: National Centre for Excellence in Mathematics and Science Teaching and Learning (NCEMSTL).

Owen, A., Green, D., Petrie, M., Davis, N., & Marriott, J. (2010). S*tatstutor: An on-line statistics learning and teaching resource.* In C.

Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Retrieved from https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots8/ICOTS8_C198_OWEN.pdf

Owen, A., Samuels, P., Wrightham, M., Leckenby, B., & Gilchrist, M. (2011). *A Pilot for a Shared Online Statistics Advisory Service*. MSOR Connections, 11(3), 35–36. https://doi.org/10.11120/msor.2011.11030035

Patel, C., De Jager, B. G., & Zou, L. (2010). *Approaches to extra-curricular statistics support for non-statistics ug and pg: facilitating the transition to higher education.* In Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Retrieved from https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots8/ICOTS8_2C1_PATEL.pdf

Patel, C., & Little, J. (2006). *Measuring maths study support.* Teaching Mathematics and Its Applications, 25(3), 131–138.

Pell, G., & Croft, T. (2008). *Mathematics support—support for all?* Teaching Mathematics and Its Applications, 27(4), 167–173.

Perkin, G., & Croft, T. (2004). *Mathematics Support Centres–the extent of current provision*. MSOR Connections, 4(2), 14–18.

Perkin, G., Lawson, D., & Croft, T. (2012). *Mathematics Learning Support in UK Higher Education: the extent of current provision in 2012* (Sigma Centre for Excellence in Mathematics and Statistics Support Report Series). Birmingham: The National HE STEM Programme. Retrieved from http://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/52789-mls-in-uk.pdf

Pfeiffer, K., Cronin, A., & Mac an Bhaird, C. (2016). *The key role of tutors in Mathematics Learning Support – A report of the 10th annual IMLSN workshop.* MSOR Connections, 15(1), 39-46–46.

Robinson, C., & Croft, T. (2003). *Engineering students-diagnostic* *testing and follow up.* Teaching Mathematics and Its Applications, 22(4), 177–181.

Rowlett, P. J., & Wright, E. J. (2005). *Creating Accessible Web Forms.* MSOR Connections, 5(4). https://doi.org/10.11120/msor.2005.05040008

Rylands, L., & Coady, C. (2009). *Performance of students with weak mathematics in first-year mathematics and science.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(6), 741–753.

Rylands, L., & Shearman, D. (2018). *Mathematics learning support and engagement in first year engineering.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(8), 1133–1147. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1447699

Samuels, P., & Gibson, M. (2013). *Developing a statistical advisory service through effective partnerships.* In HEA 2nd Annual Conference on the Aiming for Excellence in STEM Learning and Teaching. Birmingham. Retrieved from https://www.heacademy.ac.uk/system/files/msor_062_0.pdf

Samuels, P., & Patel, C. (2010). *Scholarship in Mathematics Support Services.* Journal of Learning Development in Higher Education, (2), 21.

Savage, M., Kitchen, A., Sutherland, R., & Porkess, R. (2000). *Measuring the mathematics problem.* London: The Engineering Council.

Solomon, Y., Croft, T., & Lawson, D. (2010). *Safety in numbers: mathematics support centres and their derivatives as social learning spaces.* Studies in Higher Education, 35(4), 421–431. https://doi.org/10.1080/03075070903078712

Sutherland, R., & Dewhurst, H. (1999). *Mathematics Education Framework for progression from 16-19 to HE*. University of Bristol, Graduate School of Education.

Sutherland, R., & Pozzi, S. (1995). *The changing mathematical background of undergraduate engineers: a review of the issues*. London: Engineering Council.

Symonds, R. (2009). *Evaluating student engagement with mathematics support (PhD).* Loughborough University. Retrieved from https://dspace.lboro.ac.uk/dspace-jspui/handle/2134/14435

Taylor, J. A. (1999). *Undergraduate Mathematics and the Role of Mathematics Learning Support.* In W. Sprunde, P. Cretchley, & R. Hubbard (Eds.), Delta '99: The Second Symposium on Undergraduate Mathematics (pp. 212–217). Laguna Quays, Queensland. Retrieved from https://epubs.scu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://www.google.ie/&httpsredir=1&article=1075&context=tlc_pubs

Tolley, H., & Mackenzie, H. (2015). *Senior Management Perspectives on Mathematics and Statistics Support in Higher Education*. Sigma Centre for Excellence in Mathematics and Statistics Support: Loughborough University. Retrieved from http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2015/05/sector-needs-analysis-report.pdf

Treacy, P., & Faulkner, F. (2015). T*rends in basic mathematical competencies of beginning undergraduates in Ireland, 2003-2013.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(8), 1182–1196. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1050707

Trott, C. (2003). *Mathematics Support for Dyslexic Students*. MSOR Connections, 3(4), 17–20.

Voake-Jones, C. (2016). *Social Media Guide: Using social media to connect with your students and beyond.* Sigma Centre for Excellence in Mathematics and Statistics Support: University of Bath. Retrieved from http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2016/05/Social-Media-Guide.pdf

Walsh, R. (2017). *A case study of pedagogy of mathematics support tutors without a background in mathematics education.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48(1), 67–82. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1220028

Wilkins, L. (2015). *Maybe we could just count the boxes of chocolates? Measuring the impact of Learning Development mathematics* *support for undergraduate students.* Journal of Academic Language and Learning, 9(2), A-91-A-115.

Woodhouse, S. (2004). *Developing Maths Support.* MSOR Connections, 4(4), 1–5.

Capítulo 2

Maria Emília Bigotte de Almeida, João Ricardo Branco e Carla Fidalgo

Integração dos Estudantes no Ensino Superior: Centro de Apoio à Matemática na Engenharia (CeAMatE)

Enquadramento teórico

As unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral (habitualmente designadas, no sistema de ensino superior português, por Análise, Análise Matemática, Cálculo, Cálculo Diferencial e Integral ou Matemática) são responsáveis pela base teórica dos profissionais das áreas das Ciências Exatas, nomeadamente da Engenharia e, como tal, fazem parte do plano curricular das licenciaturas dessas áreas.

No entanto, apesar da sua importância, verifica-se que estas unidades curriculares são causa de elevadas taxas de insucesso nessas licenciaturas, resultando em vários problemas, como absentismo e abandono.

Os índices de reprovação verificados, evidenciam a necessidade de investigar quais são as metodologias e estilos de ensino, os ambientes de aprendizagem e as práticas de avaliação que permitem coresponsabilizar o estudante no seu processo educativo, melhorar o sucesso escolar e induzir aprendizagens significativas (Barbosa, 2004; Rezende, 2003; Rosa et al., 2011).

Embora exista vasta investigação sobre o insucesso dos estudantes de Engenharia nas unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral, constatamos que é reduzida a produção científica que descreva práticas de ensino e técnicas de avaliação que relacionem a aprendizagem com o sucesso académico dos estudantes (Rasmussen et al., 2014).

O ensino de unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral, evidenciado em alguns estudos (Barbosa, 2004; Cardella, 2008; Gill & O'Donoghue, 2007; Rezende, 2003; Rosa et al., 2011), revela que o sucesso do estudante depende da compatibilidade dos conhecimentos de Matemática adquiridos durante os ensinos básico e secundário, com os conhecimentos considerados fundamentais para o acesso às licenciaturas em Engenharia. Com efeito, a aquisição de conhecimentos básicos e elementares, essenciais à plena integração dos estudantes em Cálculo Diferencial e Integral, tem sido uma das principais razões apontadas para o insucesso nas licenciaturas em Engenharia. Esta discussão tem conduzido à definição de múltiplas estratégias que visam a superação das dificuldades detetadas e à consequente análise do impacto da implementação das medidas (Bigotte et al., 2016; Cardella, 2008; Gill & O'Donoghue, 2007; Hieb et al., 2015; Nite et al., 2015; O'Sullivan et al., 2014).

O contexto português

O ensino superior português compreende o ensino superior universitário e o ensino politécnico. A diferenciação entre as conceções dos dois subsistemas gera algumas dúvidas aos estudantes e tem marcado as escolhas no acesso ao ensino superior.

O ensino universitário está tradicionalmente relacionado ao saber pensar e, por influência anglo-saxónica, mais ligado à investigação científica. É frequentado por 55% dos estudantes que acedem ao ensino superior. O ensino politécnico, tradicionalmente ligado ao saber fazer e à aplicabilidade do conhecimento, é frequentado pelos restantes 45%. Nos últimos cinco anos, esta proporção não teve variabilidade significativa.

Adicionalmente, a democratização do acesso ao ensino superior revela assimetrias na oferta/procura dos diversos cursos, constatando-se que as áreas da Engenharia têm sido preteridas nos anos mais recentes. Por exemplo, relativamente à oferta, regista-se que das 50852 vagas disponíveis para o ingresso no ano 2018/19, somente 11171 vagas (22%) foram afetas às 218 licenciaturas em Engenharia. Quanto à procura, os dados disponíveis no site da Direção Geral do Ensino Superior, (Direção-Geral do Ensino Superior, listado nas referências), evidenciam uma subida na procura das licenciaturas em Engenharia, com uma colocação final de 91% das vagas disponibilizadas nesta área. A taxa de colocação, na 1ª fase do concurso de acesso, correspondeu a 78%, sendo as licenciaturas em Engenharia Civil as que tiveram menos procura (52%) e a Engenharia Informática a que registou maior preferência (84%).

Uma das razões para estes resultados reside no facto de, em 2012, a Matemática e a Física terem sido introduzidas como disciplinas obrigatórias, nas provas de acesso, à maioria dos cursos de Engenharia. Esta medida justifica-se, tendo em conta a exigência de bases teóricas nessas áreas do conhecimento. Porém, a incapacidade de gerar nas gerações mais jovens o gosto por essas áreas, conduz a uma falta de preparação nas mesmas por partes de muitos estudantes, no final do ciclo secundário, e, naturalmente, a um consequente desinteresse pelos cursos de Engenharia. Este défice na procura tem obrigado as instituições de ensino superior a procurar novos públicos, através das diversas modalidades de acesso contempladas na lei (Maiores de 23 anos, Titulares de Cursos Superiores ou Médios, Diplomas de Especialização Tecnológica, Regimes Especiais, etc.), mas também a alterar sucessivamente o número de vagas, em função das colocações nos anos anteriores, implicando o encerramento e/ou a criação de novas licenciaturas.

O Instituto Superior de Engenharia de Coimbra (ISEC) é uma unidade orgânica do Instituto Politécnico de Coimbra (IPC) que ministra licenciaturas em Engenharia: Bioengenharia, Biomédica, Civil, Eletromecânica, Eletrotécnica, Gestão Industrial, Informática, Mecânica e Química. Desde o ano letivo 2018/2019, tem ainda uma licenciatura transversal, em Gestão Sustentável das Cidades.

Segundo os dados disponíveis no site da Direção Geral do Ensino Superior, para os anos mais recentes, constatamos que as licenciaturas mais procuradas são Engenharia Informática e Engenharia Mecânica, preenchendo a totalidade das vagas logo na 1ª fase do concurso geral de acesso ao ensino superior enquanto, no polo oposto, Engenharia Civil teve em 2017 o seu melhor resultado, com uma taxa de colocação de 65%, para 20 vagas disponíveis. Relativamente à taxa de ocupação geral, o ISEC apresenta para 2015, 2016, 2017 e 2018, respetivamente, os valores 86%, 79%, 97% e 88%, registando-se a necessidade de ajustar a oferta à procura, como podemos constatar pela redução do número de vagas nas licenciaturas em engenharias Biomédica, Eletrotécnica e Eletromecânica, pelo aumento de vagas na licenciatura em Engenharia Mecânica e a criação de novos cursos Bioengenharia e Gestão Sustentável das Cidades.

À semelhança do que acontece com as instituições de ensino superior, a distribuição da oferta/procura no ISEC está dependente do número de estudantes interessados nas licenciaturas em Engenharia, cuja variação possa ser explicada pelos resultados obtidos nos exames das provas específicas de ingresso, Matemática A e Física e Química A (disciplinas do ensino secundário). No entanto, visto este elenco de provas não ser aplicado a todas as engenharias, nomeadamente na licenciatura em Engenharia Informática, que não exige Física como prova específica para acesso, é importante fazer uma análise das médias das notas de ingresso nos exames daquelas duas disciplinas.

Na Tabela 1 apresentamos os dados divulgados pelo Júri Nacional de Exames, no que se refere a Matemática A, (Direção-Geral do Ensino Superior, listado nas referências). Os estudantes internos são aqueles que estão inscritos no sistema regular de ensino enquanto os autopropostos são aqueles não frequentam qualquer estabelecimento de ensino e que submeteram às provas.

Da análise dos resultados, verifica-se que os estudantes autopropostos representam cerca de 30% do total de estudantes que realizaram o exame. Verifica-se ainda que número de estudantes que realizou o exame diminuiu, ao longo do período 2015-2019, principalmente devido à redução do número de estudantes autopropostos (com exceção do ano 2017), uma vez que o número de estudantes internos é mais ou menos estável.

Quanto aos resultados, a média obtida pelos estudantes internos (entre 10.9 e 12 valores) é muito superior à obtida pelos estudantes autopropostos (entre 5.9 e 6.8 valores), o que é natural, uma vez que a maioria destes últimos são estudantes que não conseguiram concluir com aproveitamento o ensino secundário nos anos anteriores. Matemática A continua a ser uma das disciplinas onde há mais insucesso, apesar de a taxa de reprovação dos estudantes internos (entre 11% e 15%) ser muito inferior à dos estudantes autopropostos (entre 71% e 78%).

Também é de realçar que as médias dos resultados obtidos pelos estudantes internos, nos exames de nacionais de acesso, são significativamente inferiores aos resultados obtidos no final do secundário (CIF – classificação interna de frequência).

Tabela 1. Resultados do exame nacional de Matemática A (2015-2019)

	Matemática A	2015	2016	2017	2018	2019
internos	número de estudantes	33435	32716	34612	32401	33240
	variação relativamente ao ano anterior		-2%	6%	-6%	3%
	% relativamente ao total de estudantes	70%	70%	70%	71%	73%
	CIF - classificação interna	**13,6**	**13,8**	**13,8**	**14,0**	**14,0**
	média dos resultados	12,0	11,2	11,5	10,9	11,5
	% de reprovados	11%	15%	13%	14%	12%
autopropostos	número de estudantes	14466	13893	14686	13032	12424
	variação relativamente ao ano anterior		-4%	6%	-11%	-5%
	% relativamente ao total de estudantes	30%	30%	30%	29%	27%
	média dos resultados	6,8	5,9	6,8	6,1	6,6
	% de reprovados	71%	76%	72%	78%	74%

Relativamente a outras disciplinas, verifica-se ainda que Matemática A é uma das que tem maior número de estudantes a realizar exame, em qualquer das fases, e uma das que apresenta maior dispersão nos resultados, (Direção-Geral da Educação, listado nas referências).

Na Tabela 2 apresentamos os dados divulgados pelo Júri Nacional de Exames, no que se refere a Física e Química A, (Direção-Geral da Educação, listado nas referências).

A média dos resultados dos estudantes internos varia entre 9.9 e 11.1 valores sendo, tal como no exame de Matemática A, inferior nos estudantes autopropostos (varia entre 8 e 9.5 valores). A diferença entre os resultados dos internos e dos autopropostos é inferior à de Matemática A, mas as taxas de reprovação não são muito diferentes, especialmente no que respeita aos estudantes internos.

Realça-se que a média dos resultados de Física e Química A apresentou uma subida entre 2014 e 2016, seguida de uma descida drástica no ano 2017, que empurrou a disciplina para o último lugar da tabela.

De forma análoga ao que acontece em Matemática A, as médias das notas obtidas nos exames de Física e Química A, pelos estudantes internos, são inferiores aos resultados obtidos no final do secundário (uma diferença que chega, em termos médios, a exceder os 4 valores, em 2019).

A percentagem de estudantes autopropostos é da ordem de 40% e, portanto, é superior à que se verifica em Matemática A, mas tem revelado uma tendência de descida, desde 2015. Apesar disso, a média dos resultados obtidos por estes estudantes é superior à correspondente de Matemática A e a percentagem de reprovados (entre 31% e 64%) é inferior. Em termos absolutos, verifica-se que o número de estudantes internos que realiza o exame de Matemática A é superior ao que realiza o exame de Física e Química A, mas em termos de estudantes autopropostos o resultado é oposto.

Tabela 2. Resultados do exame nacional de Física e Química A (2015-2019)

	Física e Química A	2015	2016	2017	2018	2019
internos	número de estudantes	28062	28277	27715	26989	26446
	variação relativamente ao ano anterior		1%	-2%	-3%	-2%
	% relativamente ao total de estudantes	59%	62%	64%	62%	64%
	CIF - classificação interna	**13,7**	**13,9**	**14,1**	**14,2**	**14,3**
	média dos resultados	9,9	11,1	9,9	10,6	10,0
	% de reprovados	15%	11%	14%	10%	14%
autopropostos	número de estudantes	19561	17633	15292	16845	14939
	variação relativamente ao ano anterior		-10%	-13%	10%	-11%
	% relativamente ao total de estudantes	41%	38%	36%	38%	36%
	média dos resultados	8,6	9,5	8,0	9,5	8,5
	% de reprovados	31%	53%	64%	52%	59%

Sendo Matemática A e Física e Química A disciplinas nucleares para o acesso à engenharia, os fracos resultados obtidos e a dispersão dos mesmos, principalmente pelos estudantes autopropostos, fazem com que os alunos procurem alternativas para aceder ao ensino superior.

Perante este cenário, as instituições do ensino superior politécnico, tentam colmatar o decréscimo na procura das licenciaturas em Engenharia, através do regime geral de acesso, recorrendo às outras modalidades de acesso previstas na lei (Maiores de 23 anos, Titulares de Cursos Superiores ou Médios, Diplomas de Especialização Tecnológica, Regimes Especiais, etc.). Trata-se, no entanto, de um público com uma grande diversidade de características pessoais, motivacionais e cognitivas, com consequente heterogeneidade ao nível dos conhecimentos básicos e elementares, essenciais para a integração nos cursos de Engenharia, nomeadamente no que concerne à área da Matemática.

Embora esta alternativa possa beneficiar o financiamento do ensino superior, é inevitável uma adequação dos meios que permitem complementar a formação de base de alguns dos perfis admitidos, (Bigotte et al., 2015).

Neste contexto, torna-se prioritário que os docentes de Matemática, nas licenciaturas de Engenharia, sobretudo os que lecionam unidades curriculares no 1º ano, procurem mudanças nas suas práticas pedagógicas, que permitam a adequação das estratégias educativas às características dos estudantes, aos seus modos de comunicação, às dificuldades e aos estilos de aprendizagem. Esta prática torna-se um desafio permanente para os professores do ensino superior e lança para debate algumas questões importantes, nomeadamente no que respeita à relação do sucesso dos estudantes com a sua motivação e modo de aprender, bem como à forma como os docentes realizam a avaliação das suas unidades curriculares.

O Centro de Apoio à Matemática na Engenharia - CeAMatE

Para ajudar os estudantes a superar as suas dificuldades em Matemática, o Instituto Superior de Engenharia de Coimbra (ISEC) implementou um Centro de Apoio à Matemática em Engenharia

(CeAMatE), (Bigotte & Fidalgo, 2014). Este projeto teve início no ano letivo 2015/2016 e é direcionado a todos os estudantes do ISEC que pretendem receber ajuda especializada para superar a falta de conhecimentos de base em Matemática, essenciais para uma plena integração nas licenciaturas em Engenharia, (Bigotte & Branco, 2018).

Este Centro inclui três componentes: CeAMatE-in, CeAMatE-on e CeAMatE-in-on.

O CeAMatE-in é um espaço físico dedicado ao apoio na aprendizagem de matemática, com caráter não obrigatório, onde existem recursos e se desenvolvem atividades para apoiar os estudantes a superar as suas dificuldades, (Bigotte & Branco, 2018).

O CeAMatE-on é uma plataforma de e-learning, com ferramentas que podem atender aos interesses, motivações e estilos de aprendizagem dos estudantes. O respetivo conteúdo ainda está em construção, (Bigotte & Gomes, 2015).

O CeAMaE-in-on é uma espécie de modelo híbrido. A ideia básica é a mesma do CeAMatE-on, mas a implementação física usa uma plataforma b-learning (os arquivos estão online, mas os estudantes precisam de apresentar o seu trabalho no CeAMatE-in, cada vez que concluem uma etapa do seu plano individual de trabalho). Isso permite que os estudantes, especialmente os trabalhadores-estudantes, que não podem comparecer fisicamente no CeAMatE-in, possam trabalhar remotamente.

Neste trabalho, apresentamos resultados e reflexões qualitativas, sobre o desempenho dos estudantes, nos 8 primeiros semestres (4 anos de trabalho) de implementação do CeAMatE. Embora este documento apresente a implementação de um Centro de suporte específico, a generalização dos seus resultados (o que funciona e o que não funciona) fornecerá ao público informações que podem ser usadas para traduzir essa prática nos seus próprios ambientes.

Metodologia

Conforme descrito em (Bigotte & Branco, 2018), no CeAMatE é utilizada uma metodologia de diagnóstico, encaminhamento e avaliação.

O instrumento básico de diagnóstico, monitorização e avaliação é o Teste Diagnóstico, que avalia os níveis de conhecimento básico e elementar em Matemática e serve de pré teste (no início do processo) ou de sinalizador (no fim do processo).

O Teste Diagnóstico foi definido, entre os anos letivos de 2011/2012 e 2013/2014, tendo por base o relatório Mathematics for the European Engineer - A Curriculum for the Twenty-First Century, realizado pelo SEFI, através do seu grupo de trabalho Mathematics Working Group, (Alpers et al., 2013), e em cooperação com o Dublin Institut of Tecnhology. Tendo como referências o documento do SEFI e o programa do Ensino Básico e Secundário português, a versão final é constituída por vinte questões, de Álgebra, Análise e Cálculo, Geometria e Trigonometria, (Bigotte et al., 2014; Carr et al., 2015, nove das quais são comuns ao teste de diagnóstico realizado no Dublin Institut of Tecnhology, o que reforça a transversalidade do problema da educação.

O Teste Diagnóstico fornece informações específicas sobre os conteúdos matemáticos de base, no que se adapta ao ensino português e aos conhecimentos mínimos aconselhados à entrada do ensino superior para um curso de Engenharia.

No seguimento do resultado do Teste Diagnóstico e se for vontade do estudante, é elaborado um Plano Individual de Trabalho, (Bigotte et al., 2016), com os conteúdos que devem ser trabalhados durante o seu período de acompanhamento no CeAMatE.

Este documento, além dos dados (pessoais e académicos) do estudante, inclui um plano de trabalho, constituído por um conjunto selecionado de fichas de estudo e exercícios retirados do MathCentre, (O'Sullivan et al., 2014), e por um conjunto de textos, em português, produzidos pela equipa responsável pelo Centro. O plano é avaliado e reformulado, se necessário, à medida que o estudante frequenta o apoio no CeAMatE-in. Promove-se o acompanhamento contínuo do estudante, a definição de uma formação sólida e estruturada e a autoproposta de tarefas. Ao longo de todo o processo, os estudantes são acompanhados por um professor de Matemática que colabora no esclarecimento de dúvidas e na orientação dos momentos de estudo autónomo, no sentido de rentabilizar o processo de aprendizagem.

O apoio prestado no CeAMatE-in é personalizado e pretende induzir comportamentos de autoeficácia, evitar desmotivação associada ao estudo autónomo e abandono às aulas.

Na Tabela 3, apresentamos um resumo da infraestrutura, recursos humanos e operacionalização do CeAMatE.

Tabela 3. CeAMatE: infraestrutra, recursos humanos e operacionalização

1.	**CeAMatE-in**
1.1.	**Plano Individual de Trabalho (PIT)**
1.1.1.	Ficheiros do MathCentre (em inglês)
1.1.2.	Ficheiros do MathCentre (em português)
1.1.3.	Ficheiros do CeAMatE (em português)
1.2.	**Recursos humanos**
1.2.1.	Professor residente
1.2.2.	Equipa coordenadora
1.2.3.	Estudantes em regime de voluntariado
1.3.	**Horário de funcionamento**
1.4.	**Público alvo**
1.4.1.	Estudantes internos
1.4.2.	Estudantes externos
2.	**CeAMatE-on**
3.	**CeAMatE-in-on**

Na Tabela 4, apresentamos um resumo do plano de implementação do CeAMatE, desde o seu início, no segundo semestre do ano letivo 2014/2015. A numeração é a referente à Tabela 3 e as referências a negrito indicam situações novas ou diferentes do ano anterior.

Tabela 4. Plano de implementação do CeAMatE

			Descrição
2014/2015		2ºsemestre	1. **Período experimental** 1.1.1. **Ficheiros do MathCentre (em inglês)**
			1.2.1. **Professor residente A** 1.2.2. **Equipa coordenadora**
2015/2016	1ºsemestre	2ºsemestre	1. **Implementação** 1.1.1. Ficheiros do MathCentre (em inglês)
			1.2.1. Professor residente A 1.2.2. Equipa coordenadora
			1.3. **17 horas (1º semestre) + 18 horas (2º semestre)**
			1.4.1. **Estudantes internos**
			2. **Preparação**
2016/2017	1ºsemestre	2ºsemestre	1. **Consolidação** 1.1.1. Ficheiros do MathCentre (em inglês) 1.1.2. **Ficheiros do MathCentre (em português)** 1.1.3. **Ficheiros do CeAMatE (em português)**
			1.2.1. Professor residente A 1.2.2. Equipa coordenadora 1.2.3. **Estudantes em regime de voluntariado**
			1.3. **9h (ambos os semestres)**
			1.4.1. Estudantes internos 1.4.2. **Estudantes externos**
			2. **Trabalho em desenvolvimento**
2017/2018	1ºsemestre	2ºsemestre	1. Manutenção 1.1.1. Ficheiros do MathCentre (em inglês) 1.1.2. Ficheiros do MathCentre (em português) 1.1.3. Ficheiros do CeAMatE (em português)
			1.2.1. **Professor residente B** 1.2.2. Equipa coordenadora 1.2.3. Estudantes em regime de voluntariado
			1.3. 9h (ambos os semestres)
			1.4.1. Estudantes internos 1.4.2. Estudantes externos
			2. Trabalho em desenvolvimento
			3. **Preparação**
2018/2019	1ºsemestre	2ºsemestre	1. Manutenção 1.1.1. Ficheiros do MathCentre (em inglês) 1.1.2. Ficheiros do MathCentre (em português) 1.1.3. Ficheiros do CeAMatE (em português)
			1.2.1. Professor residente B 1.2.2. Equipa coordenadora 1.2.3. Estudantes em regime de voluntariado
			1.3. 9h (ambos os semestres)
			1.4.1. Estudantes internos 1.4.2. Estudantes externos
			2. Trabalho em desenvolvimento
			3. Manutenção

Resultados

Nos 8 semestres de implementação, entre os anos letivos de 2015/2016 e 2018/2019, o Teste Diagnóstico foi realizado na primeira semana de aulas das unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral dos diversos cursos ministrados no ISEC. A exceção foi o 1º semestre do ano letivo de 2016/2017, no qual o Teste Diagnóstico foi realizado aquando da matrícula no ISEC, (Bigotte & Branco, 2018). Embora a maioria das unidades curriculares Cálculo Diferencial e Integral, nos cursos de Engenharia, seja ministrada no 1º semestre do primeiro ano letivo, no ISEC algumas destas unidades curriculares também funcionam no 2º semestre, em regime deslizante, em complemento do respetivo plano curricular, (Bigotte & Branco, 2018). Esta é uma medida em vigor já há alguns anos, que tem por objetivo combater o insucesso e dá uma segunda oportunidade aos estudantes que não obtiveram aprovação no 1º semestre. Não se trata de uma mera segunda oportunidade de avaliação, mas sim de uma oportunidade de rentabilizar o trabalho do primeiro semestre, já que a presença às avaliações está dependente de um mínimo de presença às aulas.

A existência destas unidades curriculares permite-nos, não só obter dados para a nossa pesquisa em ambos os semestres de cada ano letivo, mas também um acompanhamento de longa duração e mais próximo, por parte dos estudantes com mais dificuldades.

O limite de alerta definido pelo resultado do Teste Diagnóstico é de 60%. Este resultado só define um limite de padronização do conhecimento na entrada para o ensino superior, pelo que a obtenção de um resultado superior não é suficiente para garantir que o estudante possui conhecimentos básicos e elementares, essenciais para a plena integração nas unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral. A partir da análise dos resultados, verificamos que a maioria dos estudantes não possui esses requisitos mínimos quando chegaram ao ISEC, conforme apresentado na Figura 1.

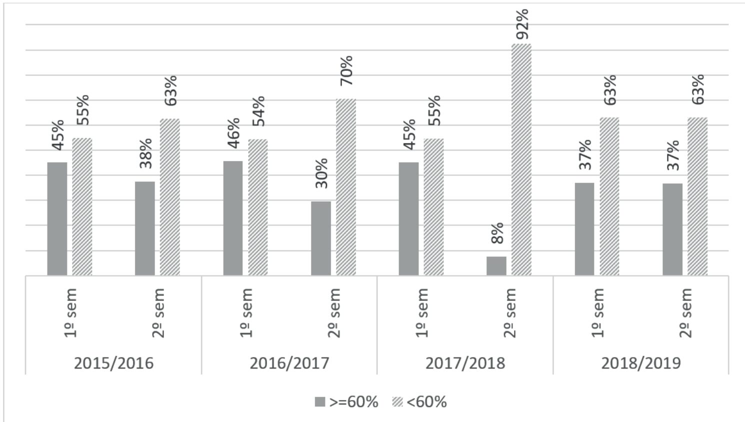


Figura 1. Resultados do Teste Diagnóstico

Os estudantes que obtiveram resultado inferior a 60% foram aconselhados a matricular-se no CeAMatE, de modo a complementar os seus conhecimentos de base em Matemática. Verificamos que 193 estudantes compareceram ao Centro, tendo 24 desses estudantes frequentado o Centro em mais do que um semestre. Os resultados estão apresentados na Figura 2.

Como esperado, uma vez que a maioria das unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral são ministradas no 1º semestre, o número de estudantes que frequentaram o Centro é superior no 1º semestre. Os estudantes que frequentaram o Centro no 2º semestre foram, maioritariamente, estudantes das unidades curriculares em regime deslizante, que funcionam como segunda alternativa, apenas em determinadas licenciaturas e somente para estudantes que não obtiveram aprovação no 1ºsemestre. Os restantes foram estudantes externos, a partir do ano letivo 2016/2017.

Observa-se, ainda, que existe um número significativo de estudantes que frequentaram o CeAMatE-in em ambos os semestres: 11 (de um total de 62) no ano letivo 2015/2016, 6 (de um total de 39) no ano letivo 2016/2017, 3 (de um total de 54) no ano letivo 2017/2018 e 4 (de um total de 38) no ano letivo 2018/2019.

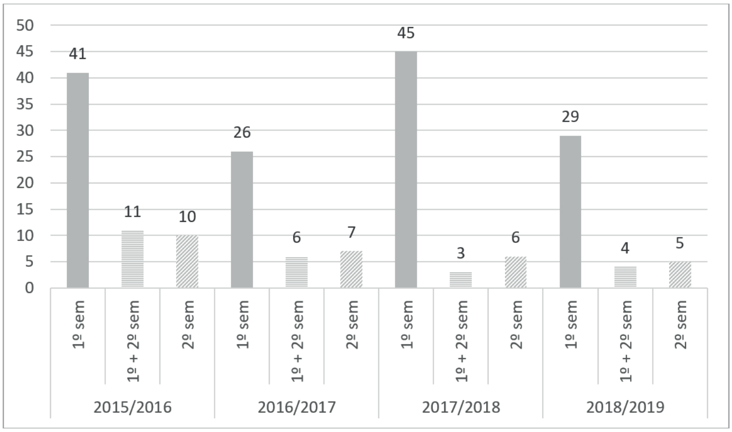


Figura 2. Número de estudantes que frequentaram o CeAMatE-in

Na Figura 3, apresentamos a evolução do tempo médio que cada estudante frequentou o CeAMatE-in. Os valores extremos, no 2º semestre dos anos académicos 2016/2017 e 2018/2019, devem-se à participação de estudantes externos. Tratam-se de estudantes que desejam ingressar no ISEC através de concursos alternativos, como cursos técnicos ou Maiores de 23 anos, por exemplo.

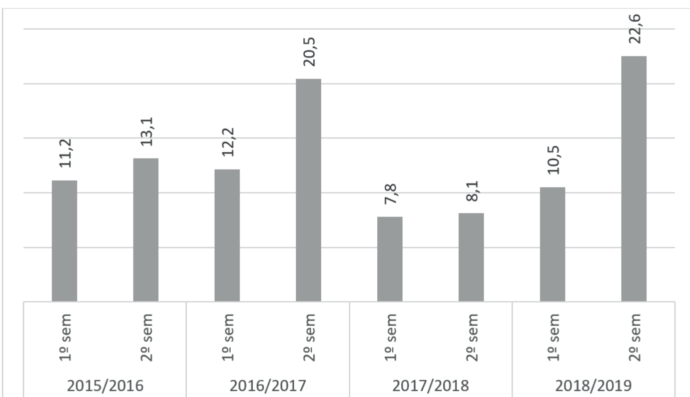


Figura 3. Tempo médio no CeAMatE-in, por estudante

Na Figura 2, observámos que existe um número significativo de estudantes que frequentaram o CeAMatE-in em ambos os semestres. Esses estudantes perceberam que precisavam de tempo para superar as suas dificuldades matemáticas, o que fica claro quando analisamos o número de estudantes que compareceram à avaliação das unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral depois de frequentarem o CeAMatE.

No 1º semestre, a maioria dos estudantes que frequentou o Centro não compareceu à avaliação. Na nossa perspetiva, esses estudantes perceberam que os seus conhecimentos não eram suficientes para se submeterem à avaliação. Uma pequena parte desses estudantes optou, depois, por frequentar novamente o Centro no 2º semestre, de modo a dar continuidade ou a redefinir o seu Plano de Trabalho Individual.

Também há estudantes que só frequentaram o Centro no 2º semestre. Surpreendentemente, a partir da análise do percurso desses estudantes, verificamos que nenhum deles se submeteu à avaliação no 1º semestre e, conscientemente, veio ao CeAMatE para superar as suas dificuldades matemáticas. Isso pode explicar porque é que os estudantes que frequentaram o Centro durante todo o ano letivo ou apenas no 2º semestre, têm taxas superiores de participação à avaliação.

Mostramos estes resultados na Figura 4.

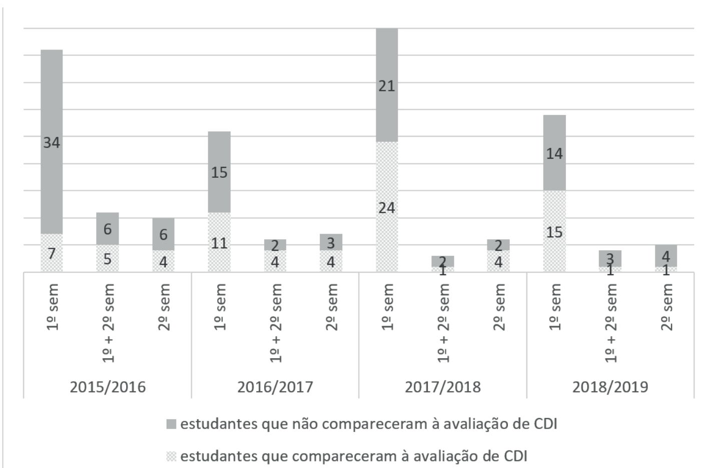


Figura 4. Participação às avaliações das unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), dos estudantes que frequentaram o CeAMatE

Na Figura 5, apresentamos a taxa de aprovação dos estudantes que compareceram à avaliação das unidades curriculares de Cálculo

Diferencial e Integral, após frequentarem o CeAMatE. No caso dos estudantes que frequentaram o Centro apenas num dos semestres, comparando os resultados de semestres homólogos, verificamos que as taxas de aprovação têm aumentado. Os resultados dos estudantes que frequentaram o Centro em ambos os semestres do mesmo ano letivo não revelam a mesma tendência. Porém, o número de estudantes nestas condições nos anos letivos 2017/2018 e 2018/2019 (e também no 2º semestre de 2018/2019) não é significativo, uma vez que apenas um estudante compareceu à avaliação em cada um desses períodos.

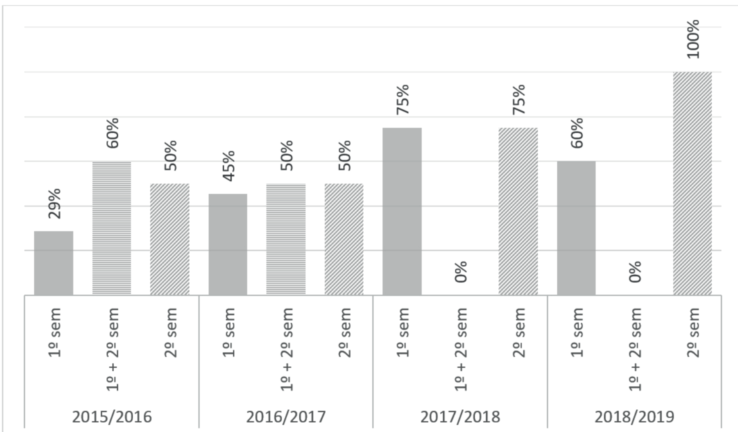


Figura 5. Taxa de aprovação às unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral, dos estudantes que frequentaram o CeAMatE

Na nossa opinião, os estudantes que não alcançam 60% no Teste Diagnóstico necessitam de um trabalho de, pelo menos, 2 horas semanais no Centro, ao longo do semestre (o que corresponde a um total de, pelo menos, 28 horas de trabalho). Esse trabalho deve ser contínuo e distribuído ao longo do tempo, de modo a permitir ao estudante assimilar os conceitos e corrigir erros de longa data. Os resultados da Figura 3 mostram que, em média, os estudantes não cumprem o tempo considerado necessário. No total dos 8 semestres da nossa amostra, apenas 21 estudantes atingiram esse objetivo mas, para esses, a taxa de participação à avaliação das unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral e a consequente taxa de aprovação são significativamente superiores, conforme apresentado na Figura 6.

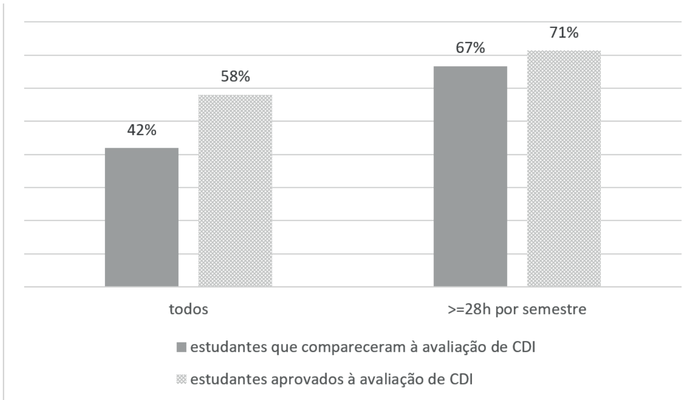


Figura 6. Taxas de participação e de aprovação, às unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), dos estudantes que frequentaram o CeAMatE

Realçamos que os estudantes da nossa amostra obtiveram menos de 60% no Teste Diagnóstico, porque somente esses estudantes foram orientados a frequentar o CeAMatE. Eram, naturalmente, estudantes com poucas expectativas de sucesso às unidades curriculares de Matemática, quando chegaram ao ISEC, dada a falta de conhecimentos básicos nessa área. Os nossos resultados mostram que o CeAMatE pode ajudá-los a obter o sucesso pretendido!

Uma vez que o CeAMatE tem um regime de participação voluntária, os estudantes apresentaram uma frequência irregular. Porém, os resultados mostram que a maioria dos estudantes que tiveram uma participação regular, conseguiram atingir os seus objetivos: 71% dos estudantes que compareceram 28 horas, ou mais, ao CeAMatE-in e participaram na avaliação à unidade curricular de Cálculo Diferencial e Integral, obtiveram aprovação.

Conclusões

Os resultados mostram que maioria dos estudantes apresenta frequência reduzida e irregular ao CeAMatE, mas também mostram que quanto mais regular é essa frequência mais esses estudantes participam na avaliação às unidades curriculares de Cálculo

Diferencial e Integral e maior é a taxa de aprovação às mesmas. Estes resultados parecem revelar a consciência dos estudantes quanto às suas limitações matemática, mas também evidenciam a inação, da maioria, para superar essas dificuldades.

Na nossa opinião, não se trata de um problema do ISEC ou dos estudantes portugueses, mas sim de um problema social. Para a maioria dos estudantes, o foco está na aprovação e não no processo de aprendizagem, pelo que acreditam que podem alcançar essa aprovação mesmo que não possuam os conhecimentos necessários. Neste cenário, o nosso maior desafio reside na forma em como podemos motivar os estudantes a frequentar o Centro. A título experimental, no ano letivo 2019/2020, definimos que os alunos que cumpram o Plano Individual de Trabalho e o mínimo de 28 horas de participação no Centro, possam incluir esse trabalho como uma das componentes da avaliação nas unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral. Esses alunos podem optar por prescindir da pergunta de exame correspondente às bases de matemática (com peso de 2 valores), em favor da avaliação do resultado do Teste Diagnóstico, que repetiram no final do seu processo de trabalho no CeAMatE. Na nossa opinião, esta opção apresenta diversas mais valias: o aluno já sabe o resultado dessa componente antes de comparecer ao exame; o aluno fica com tempo adicional para responder às restantes perguntas de exame; o aluno vê reconhecido o seu trabalho no Centro; o aluno sente-se mais motivado a cumprir o Plano Individual de Trabalho, uma vez que só nessas condições é que pode usufruir destas vantagens. Para nós, docentes, a mais valia está no facto de aluno apresentar um volume de trabalho sem o qual não seria possível melhorar os seus conhecimentos de Matemática.

Os resultados mostram que o apoio complementar pode ajudar os estudantes a superar as suas dificuldades no conhecimento básico e elementar em Matemática. O CeAMatE pode ajudá-los a superar essa falta de conhecimentos, essenciais para uma boa integração nas unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral e, consequentemente, nas licenciaturas em Engenharia.

Referências

Alpers, B.A., Demlova, M., Fant, C.-H., Gustafsson, T., Lawson, D., Mustoe, L. et al. (2013): *A framework for mathematics curricula in engineering education: a report of the mathematics working group.* Loughborough University. Report. https://hdl.handle.net/2134/14747

Barbosa, M.A. (2004). *O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de cálculo diferencial e integral* (Teses de Mestrado). Disponível na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

Bigotte, M.E. & Fidalgo, C. (2014). *O ensino da Matemática nas licenciaturas de Engenharia: Centro de Apoio à Matemática*. Cadernos de pedagogia no ensino superior, CINEP, 29, 1-25.

Bigotte, M.E., Fidalgo, C., Branco, J.R. & Santos, V. (2014). *ACAM – Competency Assessment / improvement Actions:* Diagnose to guide, In Proceedings of the 17th SEFI MWG Seminar Mathematical Education of Engineers SEFI, Dublin, Ireland, 23-25 June 2014.

Bigotte, M.E. & Gomes, A. (2015). *The CeAMatE-on project: an online Mathematical Support Centre in Engineering.* In Proceedings of XVII Simpósio Internacional de Informática Educativa, Setúbal, Portugal, 25-27 November 2015 (pp. 169-175).

Bigotte,M.E., Branco, J.R. & Fidalgo, C. (2015). *Matemática e sucesso académico no ensino da Engenharia.* Estratégias de Ensino e Sucesso Académico: Boas Práticas no Ensino Superior (Vol. 1, Chap. 4, pp. 77-91). Coimbra: CINEP/IPC.

Bigotte, M.E., Gomes, A., Branco, J.R., & Pessoa, T. (2016). *The influence of educational learning paths in academic success of mathematics in engineering undergraduate*. In the Proceedings of the 2016 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE), Erie, USA, 12-15 October 2016 (pp. 1-6). IEEE.

Bigotte, M.E. & Branco, J.R. (2018). A *program to promote mathematical knowledge for students' integration in Engineering degrees: CeAMatE*. In Proceedings of 3rd International Conference of the Portuguese Society for Engineering Education (CISPEE), Aveiro, Portugal, 27-29 June 2018. doi: 10.1109/

CISPEE.2018.8593482

Cardella, M. (2008). *Which mathematics should we teach engineering students?* An empirically grounded case for a broad notion of mathematical thinking. Teaching Mathematics and its Applications, 27(3), 150-159.

Carr, M., Fidalgo, C., Bigotte, E., Branco, J.R., Santos, V., Murphy, E. & Fhloinn, E.N. (2015). *Mathematics diagnostic testing in engineering: an international comparison between Ireland and Portugal.* European Journal of Engineering Education 40(5), 546-556.

Direção-Geral do Ensino Superior. *Regime Geral: Ensino Superior Público Concurso Nacional de Acesso*. Disponível em: https://www.dges.gov.pt/pt/pagina/regime-geral-ensino-superior-publico-concurso-nacional-de-acesso?plid=593

Direção-Geral da Educação. *Relatórios/Estatísticas*. Disponível em: https://www.dge.mec.pt/relatoriosestatisticas-0

[13] Gill, O. & O'Donoghue, J. (2007). *The mathematical deficiencies of students entering third level: An item by item analysis of student diagnostic tests.* In Proceedings of the 2nd National Conference on Research in Mathematics Education-MEI 2, Dublin, Ireland, 14-15 September 2007 (pp. 229-240).

Hieb, J., Lyle, K., Ralston, P., & Chariker, J. (2015). *Predicting performance in a first engineering calculus course: implications for interventions*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(1), 40-55.

Koch, D., & Herrin, G.D. (2006). I*ntervention strategy for improving success rates in calculus.* In the Proceedings of the 2006 ASEE Annual Conference and Exposition, Chicago, USA, 18-21 June 2006. doi: 10.18260/1-2--440

Nite, S.B., Capraro, R.M., Capraro, M.M., Allen, G.D., Pilant, M., & Morgan, J. (2015). *A bridge to engineering: A personalized precalculus (bridge) program.* In the Proceedings of the 2015 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE), El Paso, USA, 21-24 October 2015 (pp. 1-6). IEEE.

O'Sullivan, C., Bhaird, C., Fitzmaurice, O., Fhloinn, E. (2014). *An Irish Mathematics Learning Support Network (IMLSN) report on Student Evaluation of Mathematics Learning Support: Insights from a large scale multi-institutional survey.* National Centre for Excellence in Mathematics and Science Teaching and Learning (NCEMSTL), Ireland. ISBN: 9781905952588

Rasmussen, C. Ellis, J., & Zazkis, D. (2014). *Features of Successful calculus Programs at Five Doctoral Degree Granting Institutions,* In Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vancouver, Canada, 15-20 July 2014 (Vol. 5, pp. 33-40).

Rezende, W.M. (2003). *O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica* (Teses de Doutoramento). Disponível na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da Universidade de São Paulo.

Rosa, O., Rodrigues, C. & Silva, P. (2011). *Aspectos Motivacionais na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral*. Revista Eletrônica TECCEN, 4(49). doi:10.21727/teccen.v4i2.86

Capítulo 3

Dina Seabra, João Pedro Cruz, Luís Descalço, Paulo Carvalho e Paula Oliveira

Computadores no apoio ao estudo autónomo e avaliação em Matemática

O paradigma de ensino e aprendizagem está a mudar de um modelo tradicional em que os professores são a fonte da informação e conhecimento para um modelo em que estes funcionam como conselheiros que observam cuidadosamente os estudantes, ajudam na seleção da informação identificando as suas necessidades de aprendizagem e apoiam os estudantes no seu estudo autónomo.

Neste novo paradigma, os computadores e tecnologias de informação e comunicação podem ser efetivos, não apenas como meios para a transmissão do conhecimento, mas também como ferramentas capazes de fornecer automaticamente feedback e diagnóstico, no processo de aprendizagem e avaliação.

O computador no ensino da Matemática, para além de ser uma ferramenta de trabalho que possibilita o acesso a uma grande quantidade de informação, facilita a diversificação de estratégias e de materiais pedagógicos que estimulam o interesse dos estudantes e os motivam. Além disso, permite aos estudantes envolverem-se em atividades que identificam as suas dificuldades de modo a melhorar as suas aprendizagens. Por outro lado, os estudantes esperam a inserção do uso do computador, tecnologia que lhes é familiar e com a qual contactam todos os dias, quer na sala de aula quer no apoio ao estudo autónomo e autoavaliação.

Na área da matemática, já existe material pedagógico baseado em ambientes Web, produzido, por exemplo, nos projetos Passarola da Universidade do Minho (Almeida, Araújo, Brito, Carvalho, Machado, Pereira, & Smirnov, 2013) e MITO "Módulos Interativos de Treino Online", do Instituto Politécnico de Leiria, em que o utilizador gera exercícios e tem acesso à solução (MITO, 2019) .

Neste trabalho apresentam-se três sistemas informáticos desenvolvidos para a criação e utilização de exercícios com resoluções detalhadas gerados automaticamente a partir de modelos parametrizados. Estes exercícios são usados quer para apoio ao estudo autónomo quer para avaliação, em ambientes que ajudam na orientação do estudante, com interação e feedback. Desta forma, o estudante, ao alcance de um clique, tem possibilidade de resolver um ou mais exercícios sobre o mesmo assunto e, caso pretenda, pode comparar a sua resolução com a resolução proposta, a qual poderá ser mais ou menos detalhada consoante o assunto e o nível em que se enquadra. O facto de os exercícios estarem acessíveis permite ao estudante refletir sobre eles e esclarecer algumas dúvidas. Recorrendo a este tipo de material didático o estudante tem possibilidades de recuperar pré-requisitos de algumas unidades curriculares, ajudando-o, assim, a ultrapassar a falta de conhecimentos de base que são, frequentemente, as dificuldades na resolução de um exercício.

Há uma longa tradição no desenvolvimento e utilização de sistemas informáticos e conteúdos digitais parametrizados para apoio ao estudo e avaliação na Universidade de Aveiro. O Projeto Matemática Ensino (PmatE) desenvolve, desde 1989, software destinado a aumentar o gosto pela Matemática, nomeadamente pela Matemática escolar, sendo igualmente instrumento de avaliação e aprendizagem (Vieira, Carvalho, & Anjo, 2001). O público-alvo estende-se presentemente do Ensino Básico ao Ensino Superior, embora com diferentes níveis de envolvimento.

Apresenta-se uma abordagem utilizada em unidades curriculares da área da Matemática do 1º e 2º ano dos cursos de Ciências e Engenharia, que resulta da ligação entre três projetos de utilização de tecnologias no ensino, MEGUA, SIACUA e PmatE, da Universidade de Aveiro, e interligação das suas respetivas plataformas informáticas com o mesmo nome. O projeto MEGUA (Mathematics Exercise Generator, University of Aveiro) tem por principal objetivo a criação e partilha de conteúdos parametrizados entre autores, fazendo uso do software de cálculo simbólico Sage Mathematics (Cruz, Oliveira, & Seabra, 2012; Cruz, Oliveira, & Seabra, 2018). O projeto SIACUA (Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador da Universidade de Aveiro) visa a criação de sistemas informáticos com interação e feedback de apoio ao estudo autónomo (Descalço & Carvalho, 2015; Descalço et al.,2015a; Descalço et al.,2015b) e que, além de outros recursos, faz uso de uma grande quantidade de conteúdos criados no âmbito do projeto MEGUA. E, finalmente, o projeto PmatE, já referido, que é usado como uma plataforma de avaliação, com os conteúdos criados quer na plataforma MEGUA quer no próprio PmatE (modelos geradores de questões).

Do estudo de caso apresentado conclui-se que os estudantes consideram que o material resultante destes projetos é útil para a sua aprendizagem.

Modelos geradores de questões: sistemas PmatE e MEGUA

Um Modelo Gerador de Questões (MGQ) pode ser definido como um texto de autor, que, como o nome indica, gera um conjunto de exercícios por concretização de parâmetros. Estes parâmetros podem assumir, através do recurso a uma linguagem de programação, valores em diferentes domínios que podem ser, conjuntos numéricos, conjuntos de funções (escalares ou vetoriais de uma ou várias variáveis reais), conjuntos de imagens (incluindo gráficos de funções). Para além destes objetos matemáticos, os parâmetros podem ser obtidos de conjuntos de frases ou palavras dum conjunto pré-definido. Quando os parâmetros são aleatoriamente concretizados, gera-se uma questão concreta. Em suma, um modelo gerador de questões é um exercício parametrizado, ou ainda, uma família de exercícios, com os mesmos objetivos pedagógicos para um dado conceito ou conjunto de conceitos (Vieira, Carvalho, & Oliveira, 2004; Cruz, Oliveira, & Seabra, 2016; Cruz, Oliveira, & Seabra, 2018).

O sistema PmatE

Desde 1989 que o Projeto Matemática Ensino usa modelos geradores de questões como peça fundamental da sua atividade. A designação dada a estas entidades, Modelo Gerador de Questões, tem origem em Vieira (1992): um modelo é um gerador de questões sobre um certo tema escolhido à partida, obedecendo a uma determinada classificação - classificação por objetivos científicos e didáticos (de ensino e aprendizagem) e por níveis de dificuldade.

No sistema PmatE, as questões são geradas aleatoriamente por expressões parametrizadas onde os domínios dos parâmetros dependem do nível etário e escolar a que se destinam. A estas expressões com k opções de resposta (k≥4) chamamos modelo gerador dos enunciados das questões ou simplesmente modelo gerador de questões. Os quatro itens de resposta de cada questão gerada podem resultar dos k possíveis, por saída totalmente aleatória ou com uma aleatoriedade condicionada à prescrição de certos objetivos (como citado em Vieira, Carvalho & Oliveira, 2004). Cada um dos quatro itens é uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa.

As Figuras 1 e 2 representam duas concretizações de um mesmo modelo (neste caso sobre séries numéricas) formalmente equivalentes, mas distintas.

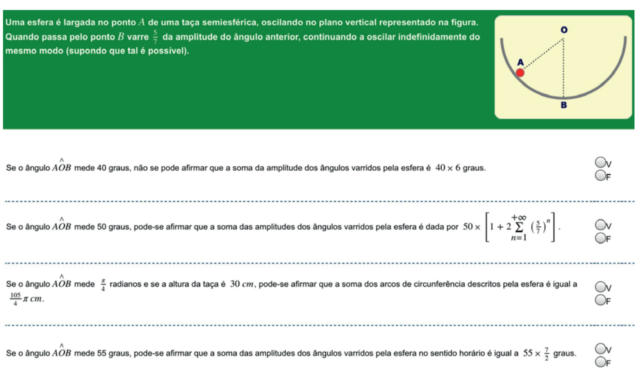


Figura 1. Uma concretização de um modelo gerador de questões

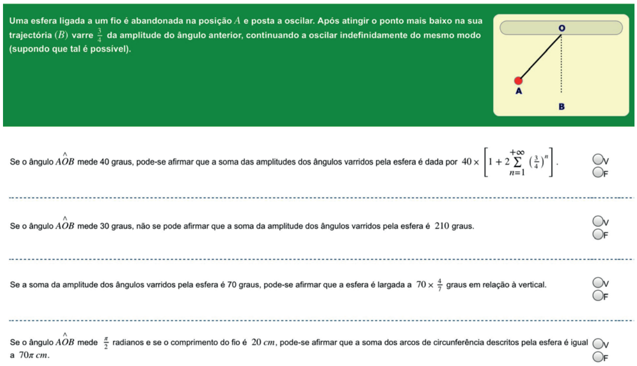


Figura 2. Uma outra concretização do mesmo modelo gerador de questões.

Em 2015, no âmbito do PmatE, foi desenvolvida uma ferramenta de criação de MGQ, designada ModelMaker (Camejo, Silva, Descalço, & Oliveira, 2016), permitindo a programação pelo próprio autor do modelo, sem recurso a programadores, como ocorria anteriormente. Assim, a elaboração de um MGQ é mais eficiente, quer em tempo de produção, quer em recursos humanos.

Estes modelos geradores de questões podem ser organizados em provas, quer de diagnóstico quer de avaliação, que estão disponíveis numa plataforma de ensino assistido por computador, também desenvolvida no âmbito do PmatE e que visa apoiar o ensino e a aprendizagem, permitindo: a gestão de turmas, a elaboração de provas por temas, a consulta do desempenho dos estudantes, a análise de resultados e, em função disso, regular o processo de ensino e de aprendizagem.

Em Pais, Cabrita, & Anjo (2011), está descrita uma experiência de utilização da plataforma do PmatE numa unidade curricular do ensino superior para avaliação e autodiagnóstico.

O sistema MEGUA

O acrónimo MEGUA surge de "Mathematics Exercises Generator" (MEG) e designa uma biblioteca informática desenvolvida na Universidade de Aveiro (UA) proposta por Cruz, Oliveira, & Seabra (2013). Esta biblioteca pode ser usada no sistema de computação colaborativa CoCalc (CoCalc, 2016) que permite a gestão de utilizadores, projetos, partilhas, histórico de modificações, bem como outras funcionalidades. Na biblioteca MEGUA os modelos são designados por exercícios parametrizados e podem ser exercícios de escolha múltipla para uso em papel ou em rede, ou exercícios de resposta aberta em papel. Em qualquer dos casos, os exercícios incluem a resolução detalhada e parametrizada em função do enunciado. A escolha de concretizações para os parâmetros é feita pelo autor, habitualmente professor, usando a linguagem de programação Python e tendo como apoio o sistema de cálculo simbólico em código aberto SageMath (William A. Stein, 2017). O facto de a linguagem Python ser uma linguagem de fácil aprendizagem, associado às potencialidades de um sistema de computação algébrica como o SageMath, facilitam o processo criativo de um modelo de exercício de escolha múltipla ou de resposta aberta. A biblioteca MEGUA contempla algumas especificidades que surgiram para responder às necessidades sentidas pelos autores de exercícios parametrizados, em particular: (i) a necessidade de apresentar ao estudante o processo de resolução de um dado exercício, (ii) a utilização online e em papel de um mesmo exercício, (iii) a necessidade de adaptar o texto matemático à utilização da linguagem LaTeX, (iv) a liberdade de expressão criativa gráfica com a linguagem HTML, (v) a capacidade de transformar por razões didáticas ou adaptar expressões usadas pelo sistema, por exemplo, usar "ln" em vez de "log" e "$\cos^2 x$" em vez de "$\cos x^2$".

Dadas as funcionalidades do sistema CoCalc relativamente à gestão de projetos, a sua utilização tem sido muito proveitosa na partilha entre docentes de diferentes unidades curriculares, quer numa reutilização direta, sem qualquer alteração do exercício em si, quer adaptando-o ao perfil dos estudantes de outra unidade curricular em que o mesmo tópico é lecionado embora, eventualmente, de uma forma diferente.

Atualmente, as concretizações de exercícios parametrizados são disponibilizadas em papel (via PDF ou LaTeX para posterior modificação) ou são enviadas para as plataformas SIACUA e PmatE onde são usadas pelos estudantes através de um computador, tablet ou smartphone.

Neste sistema, os exercícios parametrizados criados requerem do seu autor uma particular competência científica e pedagógica sobre os conceitos envolvidos, já que as questões concretizadas são complementadas com uma resolução detalhada e assente em resultados teóricos que a fundamentam.

Na Figura 3 apresentam-se duas concretizações de um mesmo exercício parametrizado e na Figura 4 as respetivas resoluções.

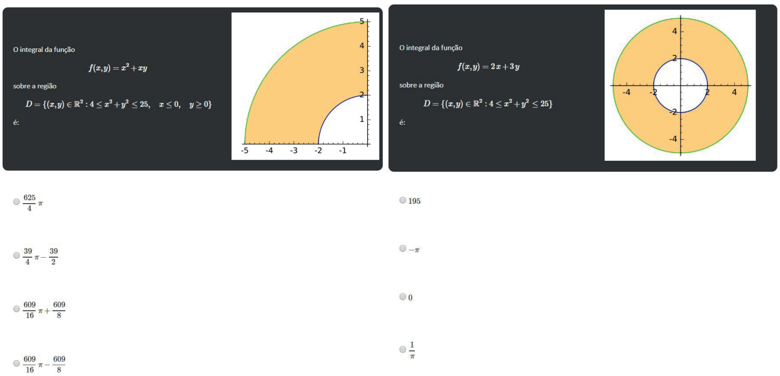
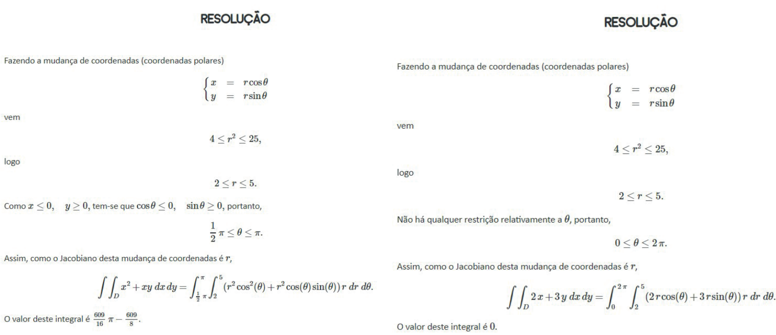


Figura 3. Duas questões geradas por um mesmo exercício parametrizado



RESOLUÇÃO

Fazendo a mudança de coordenadas (coordenadas polares)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

vem

$$4 \leq r^2 \leq 25,$$

logo

$$2 \leq r \leq 5.$$

Como $x \leq 0, \quad y \geq 0$, tem-se que $\cos\theta \leq 0, \quad \sin\theta \geq 0$, portanto,

$$\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Assim, como o Jacobiano desta mudança de coordenadas é r,

$$\int\int_D x^2 + xy \, dx\, dy = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\int_2^5 (r^2\cos^2(\theta) + r^2\cos(\theta)\sin(\theta))\, r \, dr \, d\theta.$$

O valor deste integral é $\frac{609}{16}\pi - \frac{609}{8}$.

RESOLUÇÃO

Fazendo a mudança de coordenadas (coordenadas polares)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

vem

$$4 \leq r^2 \leq 25,$$

logo

$$2 \leq r \leq 5.$$

Não há qualquer restrição relativamente a θ, portanto,

$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Assim, como o Jacobiano desta mudança de coordenadas é r,

$$\int\int_D 2x + 3y \, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_2^5 (2r\cos(\theta) + 3r\sin(\theta))\, r \, dr \, d\theta.$$

O valor deste integral é 0.

Figura 4. Resoluções das questões apresentadas na Figura 3

Apoio ao estudo autónomo

O recente desenvolvimento tecnológico faz com que o papel do professor tenha vindo a mudar nos últimos tempos. Este já não é apenas quem fornece a informação, tornando-se mais um orientador na seleção da grande quantidade de informação a que o estudante pode aceder facilmente. Os computadores podem ser utilizados para apoiar o professor nesta sua nova missão como referido em Pacheco-Venegas & Lópes. & Andrade-Aréchiga (2015).

Existem muitos sistemas que servem como repositórios para colocar informação, sendo o mais utilizado nas instituições de ensino o Moodle. Contudo, um sistema que indique de forma clara e simples qual é a informação mais relevante, que o estudante perceba que é da autoria do seu professor, e que forneça algum feedback, pode ajudar a evitar que fique perdido no estudo autónomo que é suposto fazer no processo de aprendizagem que se pretende que seja ativa.

No sentido de apoiar os estudantes no seu estudo autónomo têm sido desenvolvidas, ao longo dos anos, diversas aplicações Web. Neste processo seguem-se linhas orientadoras muito claras, procurando caminhar na direção de um sistema o mais simples possível, que permita aos estudantes um primeiro contacto com os conteúdos programáticos e que lhes forneça feedback útil bem como indicações e referências para um estudo completo. Além do grande número de exercícios com resoluções detalhadas já referido, disponibilizaram-se pequenos vídeos nas plataformas, criados pelos próprios professores, de modo a que este primeiro contacto seja mais pessoal, tornando as ferramentas particularmente úteis para utilização numa metodologia em flipped learning.

No que se segue apresenta-se a última aplicação Web desenvolvida, a plataforma SIACUA, e a sua utilização no estudo autónomo.

SIACUA

A plataforma SIACUA contém questões que resultam da concretização dos parâmetros dos exercícios parametrizados; é um sistema aberto no sentido em que os estudantes podem, ao seu ritmo e disponibilidade, ver o seu desenvolvimento espelhado nas barras de progresso associadas a cada conceito (ver Figura 5).

A interação do estudante com o sistema é muito simples: consiste apenas na seleção de um tema e, clicando sobre a correspondente barra, tem acesso a uma questão de escolha múltipla que aparece de modo automático e aleatório de entre as questões que existem no sistema sobre esse conceito. Cada questão é identificada com um número que o estudante pode ver no momento que está a responder. Mediante este número pode mais tarde voltar a responder à mesma questão depois de estudar de novo o assunto ou, caso tenha alguma dúvida na resolução solicitar a intervenção do professor.

Esta plataforma também contém, no menu lateral antes de cada barra de progresso, elementos que apoiam a aprendizagem autónoma fora das aulas: os botões 1, 2 e 3 (cf. Figura 5). Nos botões 1 e 2, são fornecidos, de maneira muito simples e resumida, alguns pré-requisitos para compreensão do conceito e uma breve introdução que, por vezes, inclui pequenos vídeos explicativos. No botão 3 são sugeridas algumas referências, em particular, livros, por vezes com a indicação precisa do assunto abordado e sugestão de resolução de exercícios complementares.

O sistema infere qual o estado cognitivo de cada estudante pela análise do seu desempenho resultante da sua utilização. Uma das suas características importantes consiste na forma simples de apresentar as questões e dar feedback. O estudante pode saber de imediato se a sua resposta está correta ou não, e pode obter uma resolução completa e detalhada que funciona como um elemento de estudo.

Além disso o SIACUA fornece informação ao estudante sobre o seu progresso geral na sua aprendizagem, na forma de um índice com barras de progresso associadas a cada tópico. O progresso é calculado fazendo uso de um modelo Bayesiano de utilizador (Millán et al., 2013). Assim, acertar ou errar numa questão que envolve um dado conceito vai fazer alterar o progresso não apenas nesse conceito, mas também nos seus ascendentes na árvore de conceitos (Descalço & Carvalho, 2015).

O SIACUA está a ser usado, entre outras, na unidade curricular de Cálculo. Parte do índice programático desta UC é apresentada na Figura 5. Para ilustrar o funcionamento do sistema, pode-se dizer que, por exemplo, se um estudante acerta numa questão sobre "Limites de funções escalares", a estimativa do seu conhecimento calculado pela rede Bayesiana vai subir neste conceito, mas também no nó em que este conceito está pendurado "Limites, continuidade e diferenciabilidade" e ainda no nó "Funções de várias variáveis" que é também um seu ascendente nesta árvore. Mais, o "conhecimento" é propagado até ao primeiro tópico do índice, que representa todo o curso dando um indicador do desenvolvimento global do estudante neste curso. Este cálculo é feito a partir de um pequeno conjunto de parâmetros fornecidos ao sistema pelos autores das questões parametrizadas que são usados para definir as probabilidades na rede Bayesiana (Descalço et al., 2015b).

Figura 5. Árvore de conteúdos

Combinação dos sistemas informáticos

Cada um destes sistemas pode funcionar de forma independente, mas é a sua combinação que tem grandes vantagens. Nesta secção aborda-se a sua utilização pelos principais intervenientes: professor e estudantes.

O professor cria e/ou utiliza recursos da plataforma MEGUA para os disponibilizar nas plataformas online SIACUA e PmatE, ou para serem usados em fichas de exercícios ou provas de avaliação no formato tradicional (em papel).

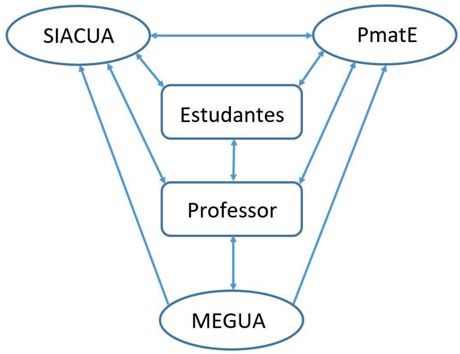


Figura 6. Combinação dos sistemas informáticos

Como já foi referido, os estudantes podem responder a questões nos dois sistemas, PmatE e SIACUA, obtendo um feedback imediato sobre o seu desempenho: no SIACUA visualizam as suas barras de progresso e no PmatE consultam as provas submetidas e a respetiva classificação em percentagem. Além disso, o professor pode consultar o desempenho das suas turmas, ou de um estudante em particular, em ambas as plataformas.

Estas ferramentas informáticas permitem a adoção de uma metodologia que tem como principal objetivo incentivar o trabalho contínuo dos estudantes ao longo do semestre, sem que isso implique um esforço excessivo por parte dos professores. As questões parametrizadas, por um lado estão disponíveis para aprender e por outro lado são apropriadas para a avaliação pois permitem criar automaticamente provas diferentes para cada estudante que avaliam os mesmos conteúdos e com o mesmo grau de dificuldade. Fazendo uso da grande quantidade de questões que têm sido criadas ao longo dos anos, a elaboração de uma prova de avaliação no PmatE demora apenas uns minutos e os resultados podem ser recolhidos de imediato num ficheiro Excel.

Embora a avaliação por questões de escolha múltipla tenha as suas limitações, serve aqui o propósito pretendido que é o de fornecer uma grande variedade e quantidade de elementos de avaliação que podem ser feitos ao longo do semestre, de forma a que o estudante trabalhe regularmente sem deixar acumular conteúdos para os testes de avaliação principais (tipicamente a meio e no fim do semestre) ou para exame final.

Um estudo de caso

A unidade curricular de Cálculo em que se faz uso desta metodologia neste ano letivo (2018/2019) envolve cerca de 400 estudantes de Engenharias e Ciências. Nesta unidade curricular aplica-se uma metodologia que usa os sistemas referidos. As aulas são, em geral, teórico-práticas embora em alguns tópicos seja ensaiada uma metodologia de aprendizagem autónoma apoiada pelas referidas plataformas. Ao longo do semestre são dados, semanalmente, trabalhos para realizar fora de aula que podem ser de dois tipos.

O primeiro consiste numa lista de problemas desafiantes que é disponibilizada aos estudantes para resolverem fora de aula, sobre os quais são depois avaliados nas aulas. O segundo consiste na realização de um pequeno teste sobre o assunto que está a ser estudado no momento e que se realiza na plataforma PmatE; neste caso, os estudantes podem estudar e fazer uma autoavaliação prévia no SIACUA, tendo acesso imediato ao feedback sobre o seu desempenho, incluindo as respostas detalhadas às questões a que não responderam acertadamente.

Esta metodologia tem como principal objetivo o desenvolvimento de competências ao longo do semestre evitando os resultados insatisfatórios que se verificam nesta unidade curricular quando os estudantes deixam todo o trabalho para próximo dos momentos principais de avaliação. A utilização de computadores, neste contexto, permite efetuar um maior número de pequenas avaliações formativas, que apoiam um estudo autónomo continuado.

Para avaliar esta metodologia, realizou-se um questionário ao qual responderam 104 estudantes de todos os cursos envolvidos. O objetivo principal deste questionário era recolher a opinião dos estudantes sobre a utilidade dos sistemas informáticos utilizados.

O questionário consiste em apenas seis questões, mais uma de resposta aberta, onde é pedido aos estudantes que atribuam um valor de 1 a 10 a cada uma delas:

1. Utilidade da lista de problemas desafiantes na aprendizagem
2. Utilidade das questões de escolha múltipla com resolução detalhada do SIACUA no seu estudo
3. Utilidade das barras de progresso no seu estudo
4. Utilidade dos itens 1, 2 e 3 do SIACUA na aprendizagem
5. Utilidade dos vídeos do SIACUA
6. Utilidade das provas do PmatE

A segunda questão é aquela que tem para nós mais importância pois dá-nos informação sobre a perceção dos estudantes relativamente à utilidade de uma parte fundamental do nosso trabalho: a criação e utilização de questões de escolha múltipla com resolução detalhada na aprendizagem. A Figura 7, mostra a média das respostas a cada questão. Embora a avaliação dos estudantes seja claramente positiva em todas as questões, é esta que se destaca pelo seu valor mais elevado. É também interessante notar que os vídeos têm especial interesse dentro dos botões laterais que são denotados por 1, 2 e 3, fornecendo informação de forma rápida e simples. Estes vídeos são muito curtos, com duração entre dois e três minutos apenas, e muito direcionados para conceitos específicos. São produzidos para um primeiro contacto com os conceitos e a linguagem utilizada é o menos formal possível, sem que com isso se perca precisão e rigor.

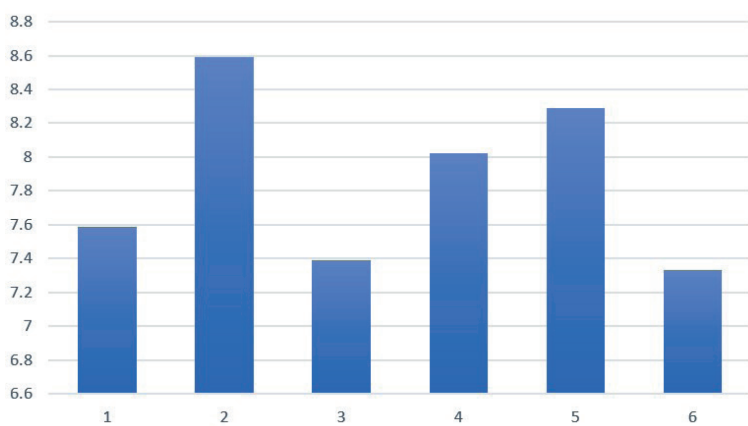


Figura 7. Resultados do questionário

Também na questão de resposta aberta foi recolhida informação essencialmente motivadora para os professores continuarem o seu trabalho, com diversos estudantes a elogiar vários aspetos da plataforma e o trabalho dos professores.

Conclusão

A criação de modelos geradores de questões (como designados no projeto PmatE), ou de exercícios parametrizados (como designados no projeto MEGUA), é um desafio para o autor que, apesar de ser um processo demorado, traz os seus benefícios a longo prazo:

- os estudantes passam a dispor de um vasto leque de exercícios distintos sobre um dado tema, usando as plataformas SIACUA e PmatE;
- os exercícios podem ser usados em vários contextos e em vários anos letivos;
- o próprio desenvolvimento de um exercício (ou modelo) é uma atividade cientifico-pedagógica em si, pois requer profundos conhecimentos do assunto em trabalho.

Esta metodologia contribui de forma ativa para a aprendizagem, autoavaliação e motivação dos diferentes intervenientes no processo ensino-aprendizagem. A atividade de autoria de conteúdos parametrizados deste género, também por parte dos estudantes de áreas pedagógicas ou outras, é uma excelente ferramenta de aprendizagem (Cruz, Oliveira, & Seabra (2018)).

No ano letivo 2017/18 foi utilizada a plataforma SIACUA, para motivar os estudantes no estudo autónomo em flipped learning, com resultados bastante promissores (Descalço, Carvalho, & Oliveira, 2018). Como referido na secção anterior, os estudantes valorizam cada um dos diversos elementos disponibilizados pela plataforma e, no corrente ano letivo, está a ser usada com novas funcionalidades, quer a nível de pesquisa de informação sobre conteúdos e utilização, para os professores, quer a nível de enriquecimento a nível de conteúdos e novas funcionalidade disponibilizados para os estudantes.

Foi criada a possibilidade de participar num ranking definido pelo diagnóstico Bayesiano, por curso, de modo a que os estudantes possam comparar a sua prestação com a dos seus colegas. De forma a incentivar a interação e colaboração, os estudantes têm agora a possibilidade de adicionar a este ranking um link para a sua página de Facebook, ou outra, bastando clicar sobre o nome para seguir o link.

Todo o material disponibilizado na plataforma SIACUA é facilmente reutilizável em novos contextos pois é simples criar cursos, utilizando partes (subárvores de conceitos) de cursos existentes.

As plataformas SIACUA, MEGUA e PmatE estão em constante atualização e tem havido uma preocupação de as tornar de utilização cada vez mais fácil, de modo a que os professores as considerem como uma mais-valia e não algo que requer um esforço adicional.

Os autores pretendem continuar este trabalho de criação e disponibilização de diversos conteúdos para o estudo autónomo e avaliação, motivados pelo excelente retorno por parte dos estudantes. Pretendem também tornar cada vez mais simples a autoria e disponibilização de conteúdos pelos professores, adequando este esforço às reais necessidades dos estudantes, sendo estas identificadas através de questionários, semelhantes ao referido anteriormente.

Referências

Almeida, J. J., Araújo, I., Brito, I., Carvalho, N., Machado, G. J., Pereira, R. M., & Smirnov, G. (2013). *PASSAROLA: High-order exercise generation system.* Proceedings of 8th Iberian Conference on Information Systems and Technologies (CISTI) (pp. 1-5). IEEE. Retrieved from http://hdl.handle.net/1822/26999.

Camejo, J., Silva, A., Descalço, L., & Oliveira, P. (2016). *ModelMaker, a Multidisciplinary Web Application to Build Question Generator Models from Basic to Higher Education.* Proceedings of EDULEARN16 Conference, Academy of Technology, Education and Development (IATED), 5095-5103, Barcelona, Spain. Retrieved from http://hdl.handle.net/10773/21326.

CoCalc (2016), *Collaborative Calculation in the Cloud.* Retrieved from https://cocalc.com/.

Cruz, J.P., Oliveira, P., & Seabra, D. (2012). *Exercise templates with*

Sage. Tbilisi Mathematical Journal, 5(2), 37-44.

Cruz, J.P., Oliveira, P., & Seabra, D. (2016). *Parameterized exercises in SMC.* Proceedings of the 9th International Conference of Education, Research and Innovation (ICERI2016), Seville, Spain. Retrieved from http://hdl.handle.net/10773/16483.

Cruz, J.P., Oliveira, P., & Seabra, D. (2018). *Motivation behind parameterized exercises.* Proceedings of the 12th annual International Technology, Education and Development Conference, (INTED), Valencia, Spain. Retrieved from http://hdl.handle.net/10773/24548.

Cruz, J.P., Oliveira, P., & Seabra, D. (2013). *Megua Package for parameterized exercises.* Proceedings of the 6th International Conference of Education, Research and Innovation, (ICERI2013), Seville, Spain. https://library.iated.org/view/CRUZ2013MEG.

Descalço, L., & Carvalho, P. (2015). *Using parameterized calculus questions for learning and assessment.* Atas da 10ª Conferência Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação, 710-714, Águeda. Retrieved from http://hdl.handle.net/10773/14969.

Descalço, L., Carvalho, P., Cruz, J.P., Oliveira, P., & Seabra, D. (2015a). *Computer-assisted independent study in multivariate calculus.* Proceedings of EDULEARN15 Conference, International Academy of Technology, Education and Development (IATED), 3352-3360, Barcelona, Spain. Retrieved from http://hdl.handle.net/10773/14533.

Descalço, L., Carvalho, P., Cruz, J.P., Oliveira, P., & Seabra, D. (2015b). U*sing Bayesian Networks and parametrized questions in independent study.* Proceedings of EDULEARN15 Conference, International Academy of Technology, Education and Development (IATED), 3361-3368, Barcelona, Spain. Retrieved from http://hdl.handle.net/10773/14464.

Descalço, L., Carvalho, P., & Oliveira, P. (2018). *Motivating study before classes on Flipped Learning.* Proceedings of EDULEARN18 Conference, International Academy of Technology, Education and Development (IATED), 6295-6300, Palma, Spain. Retrieved from http://hdl.handle.net/10773/23905.

MEGUA: package for parameterized exercises in Sage Mathematics, retrieved from https://megua.ua.pt/.

Millán, E., Descalço, L., Castillo, G., Oliveira, P., & Diogo, S. (2013). *Using Bayesian networks to improve knowledge assessment.* Computers and Education, 60(1), 436-447.

MITO "Módulos Interativos de Treino Online" (2019), retrieved from https://mito.ipleiria.pt/.

Pacheco-Venegas N.D., Lópes G. & Andrade-Aréchiga M.(2015). *Conceptualization, development and implementation of a web-based system for automatic evaluation of mathematical expressions.* Computers and Education, 88, 15-28

Pais, S., Cabrita, I., & Anjo, A. B. (2011). T*he use of Mathematics Education Project in the learning of mathematical subjects at University level.* International Journal of Education. (Macrothink Institute – ISSN 1948-5476), 3(1), E4.

PmatE: Projeto Matemática Ensino, retrieved from https://pmate.ua.pt/oficial/.

SIACUA: Interactive Computer Learning System, University of Aveiro, retrieved from http://siacua.web.ua.pt/

Vieira, J, Carvalho, P., & Oliveira, P. (2004). *Modelo Gerador de Questões.* Proceedings of the IADIS International Conference on WWW/Internet.

Vieira, J.C.D. (1992). *Avaliação Formativa - uma experiência.* Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática (APM), 1(1).

Vieira, J.C.D., Carvalho, M. P., & Anjo, A. B. (2001). *Sa3c Sistema de Avaliação e Aprendizagem Assistida por Computador.* Proceedings of the International Conference on New Technologies in Science Education 2(1), 105–110. ISBN 972-789-028-8.

William A. Stein et al. *Sage Mathematics Software* (Version 8.0), The Sage Development Team, 2017, retrieved from http://www.sagemath.org.

Capítulo 4

Sandra Gaspar Martins

Mini-testes semanais no Moodle: Uma abordagem que se pretende efetiva e justa

A utilização de mini-testes no Moodle para aumentar a aprendizagem é largamente difundida um pouco por todo o mundo, no entanto, não há consenso sobre a abordagem mais efetiva para os utilizar. O receio dos professores de que os alunos copiem uns pelos outros e não aprendam a matéria faz com que muitos docentes não invistam nesta ferramenta.

Nesta abordagem estiveram disponíveis mini-testes semanais online no Moodle que não eram gerados aleatoriamente: eram iguais para todos os alunos. Podiam ser submetidos as vezes que os alunos quisessem sem penalização. Estes mini-testes eram opcionais e só contavam 10% da nota se os alunos obtivessem mais de 9 em 20 valores na avaliação "tradicional" presencial.

O objetivo destes testes é que os alunos estudem, vão acompanhando a matéria e se auto-avaliem. A ideia é que todos os alunos tentem e voltem a tentar até conseguirem resolver todo o mini-teste. Temos consciência que no final todos os alunos obterão 100% e dizemos isso mesmo aos alunos, lembrando-os que os mini-testes são para eles terem a perceção do nível que estão a atingir e que se copiarem em todos os mini-testes estes não terão servido de nada e provavelmente reprovarão na avaliação tradicional.

Estes mini-testes foram aplicados a Análise Matemática em IR e IR^n para alunos de Engenharia do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa do Instituto Politécnico de Lisboa, ambas com cerca de 100 alunos. Dadas as notas nos mini-testes, a adesão dos alunos, o seu feedback através de um questionário e as notas "tradicionais" tudo indica que esta é uma abordagem positiva, que gera uma melhor aprendizagem e que não gera injustiça.

A utilização de mini-testes tem sido amplamente estudada, no entanto, a literatura ainda não é consensual sobre a melhor estratégia para aplicar mini-testes nem mesmo se realmente aumenta a compreensão dos alunos sobre os assuntos, particularmente no estudo de matemática por estudantes de engenharia.

Frequentes mini-testes online têm sido sugeridos como uma estratégia para melhorar a aprendizagem por várias instituições e investigadores. O National Centre for Public Policy and Higher Education in the U.S.A (Twigg, 2005) considera a avaliação contínua baseada no computador com feedback como uma estratégia-chave para a melhoria da qualidade na aprendizagem. De acordo com Gibbs (2000), a avaliação do aluno é uma forma eficaz de aumentar a compreensão e os mini-testes online forçam os alunos a gastar mais tempo trabalhando produtivamente fora da sala de aula. Tuckman (1998) refere que isto é especialmente valioso para os procrastinadores. Um método que pode ser usado para resolver a crise na matemática universitária, de acordo com Thiel, Peterman e Brown (2008), é "fornecer avaliação regular do progresso", isto porque "trabalhos de casa online e mini-testes com classificação online fornecem aos alunos feedback imediato, a oportunidade de corrigir seus erros em trabalhos de casa e a avaliação contínua de seu sucesso na matéria". Booth (2012) considera que o trabalho de casa deve ser dado em horários regulares, em intervalos regulares, semanalmente; propondo que a aprendizagem é trabalho e os alunos devem desenvolver hábitos de trabalho regulares para ter sucesso. O feedback é crucial para o sucesso do aluno, mas dar feedback adequado com turmas grandes é difícil e, portanto, os sistemas automatizados são uma solução útil para o grande problema do tamanho das turmas.

Lawson (2012) considera que os "benefícios indiscutíveis" dos mini-testes são: a sua disponibilidade contínua; a sua capacidade de dar feedback imediato; o anonimato; e que eles permitem que o aluno pratique repetidas vezes. No entanto, o investigador também refletiu sobre uma lista de possíveis problemas como: alunos adivinharem as respostas; se os alunos devem ou não acumular pontos negativos quando não respondem a uma pergunta; a conceção do teste num computador pode gerar dificuldades extra, ou a possibilidade de não avaliar o que é pretendido; ou a dificuldade de inserir matemática; as respostas a perguntas de escolha múltipla não dão crédito parcial; e que pode ser difícil avaliar resultados de alto nível usando mini-testes. Lawson também afirma que, se os mini-testes são usados apenas como uma avaliação formativa, isso reduz muito esses problemas e que "os alunos tiram grande proveito da tentativa de responder a perguntas e obter feedback imediato", portanto os mini-testes não devem ser abandonados.

Os mini-testes fazem parte de várias abordagens bem-sucedidas com diferentes tipos de alunos, tanto nas melhores universidades quanto em outras instituições de ensino superior. Exemplos: TEAL (Dori & Belcher, 2004) no Massachusetts Institute of Technology (MIT); SCALE-UP (Beichner, Saul, Abbott, Morse, Deardorff, Allain, ... e Risley, 2007) na North Carolina State University; Peer Teaching (Lasry, Mazur & Watkins, 2008) da Universidade de Harvard; e Módulos de Aprendizagem On-line (Hill, Sharma & Johnston, 2015) na Universidade de Sydney.

Particularmente, no ensino da matemática no ensino superior, várias abordagens foram estudadas, mas a literatura ainda não é consensual sobre a eficácia dos mini-testes para melhorar a aprendizagem. Algumas abordagens levam a uma taxa de sucesso mais alta, outras não. Existem muitas estratégias diferentes para aplicar mini-testes: on-line ou em sala de aula; obrigatório ou opcional; contribuir para as notas finais ou não; semanalmente ou com outra periodicidade; gerando uma questão ligeiramente diferente (nova instância) para cada aluno ou não; penalização pelo envio da resposta mais de uma vez ou não; apenas questões de escolha múltipla ou mais sofisticadas, etc. Os investigadores ainda procuram a melhor combinação. A seguir, apresentamos algumas abordagens para estudar o uso de mini-testes para ensinar matemática no ensino superior, que ilustram a diversidade de abordagens e resultados.

Siew (2003) administrou seis mini-testes para 21 alunos num curso de Álgebra Linear que contribuíram com 20% para a nota final. Os mini-testes usaram o Maple em segundo plano, dando perguntas com valores diferentes cada vez que a pergunta é gerada. Quando um aluno reenviava uma resposta era penalizado e a solução só estava disponível após a data final. De acordo com 86% dos alunos, os mini-testes contribuíram para a compreensão do assunto e para 95% dos alunos, o feedback sobre os mini-testes foi útil para a sua aprendizagem. A pontuação dos alunos no curso foi maior neste ano do que nos anos anteriores.

Varsavsky (2004) relata um caso em que mini-testes semanais on-line foram aplicados a 250 estudantes de Cálculo. Os oito melhores dos dez mini-testes contribuíram para 20% da nota final, se os alunos passaram no exame final (devido a esta restrição, o plágio não era motivo de preocupação). Durante uma semana, os alunos podem responder aos mini-testes sem restrições de tempo. A introdução dos mini-testes foi considerada uma experiência positiva.

Blanco and Ginovart (2009) criou um grande conjunto de quizzes no Moodle para Matemática 1 e 2 na Universidade Politécnica da Catalunha, Espanha. Os quizzes eram utilizados de várias formas diferentes. Quando usados em sessões de laboratório de computadores, os resultados dos estudantes não eram preditivos das notas dos alunos. No entanto, num questionário sobre os quizzes mais de 80% classificaram-os como uma atividade positiva, mais de 70% dos alunos afirmaram que os quizzes os ajudaram a compreender alguns tópicos das aulas e cerca de 45% afirmaram que os quizzes os tornaram mais interessados na matéria.

Shorter and Young (2011) compararam três métodos de avaliação: (1) quizzes diários na aula, (2) trabalhos de casa online, and (3) "project-based learning". Eles concluíram que os "quizzes diários nas aulas" eram os melhores preditores da aprendizagem dos alunos (dependentes das notas dos pós-testes) para 117 alunos de licenciatura num curso de Cálculo.

Myers and Myers (2007) estudaram uma unidade curricular de estatística com cerca de 65 estudantes em dois semestres com duas estratégias diferentes. A primeira estratégia: num semestre os alunos têm dois testes um a meio outro no final do semestre. Segunda estratégia: noutro semestre os alunos fazem um teste a cada duas semanas. A segunda estratégia produziu melhores resultados.

Em Portugal, no Instituto de Engenharia de Coimbra, o projeto eMAIO (https://lvm.isec.pt/lvm2/login/index.php) oferece online quizzes para apoio à aprendizagem de Análise Matemática 1, esses quizzes não são obrigatórios nem contam para nota (Caridade, 2012). Instituto Superior Técnico teve, desde 2007 a 1015 (pelo menos), "Módulos de Apoio à Formação Básica em Matemática" (http://modulos.math.ist.utl.pt) para melhorar o desempenho dos alunos do primeiro ano em conceitos aprendidos o ensino secundário. Na Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, João Nuno Tavares lidera uma equipa que produziu o projeto "Apoio ao Aluno da FCUP: Temas de Matemática Elementar" (http://cmup.fc.up.pt/cmup/apoiomat/ index.html) que, também com quizzes pretende melhorar a compreensão de conceitos do ensino secundário.

Contexto

Esta investigação teve lugar em duas unidades curriculares de matemática no Instituto Superior de Engenharia de Lisboa para as quais foram disponibilizados mini-testes semanais on-line no Moodle. No segundo semestre de 2013/2014, para 104 alunos de Análise Matemática 2 (AM2), da Licenciatura em Eletrotécnica, Telecomunicações e Engenharia de Computação, com os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral em IR^n. Três professores lecionaram três turmas, duas durante o dia e uma durante a noite, seis horas por semana. A outra UC foi Matemática Aplicada à Engenharia (MAE), da Licenciatura em Engenharia Informática e Multimídia, com o programa de Derivadas; Integrais: Simples, Indefinidos e Impróprios; e Parametrização de linhas e superfícies. Implementou-se no primeiro semestre de 2015/2016 com 108 alunos. Dois professores lecionaram três turmas, duas durante o dia e uma durante a noite, de quatro horas e meia por semana. O investigador era o professor responsável e lecionava uma turma diurna em cada semestre.

Adotámos o nome “Mini-testes” em vez de “Quizzes” para reforçar sua relevância. A avaliação “tradicional” envolveu dois testes presenciais, o Exame e o Exame de recorrência. Para AM2, os mini-testes valiam até dois valores proporcionais às melhores 12 (de 14) notas nos mini-testes e foram tidos em conta apenas se o aluno obteve mais de 9,0 valores (de 20) na avaliação “tradicional”. Para o MAE, foi um pouco diferente: os mini-testes valiam 10% da nota se o aluno obteve mais de 9,0 valores (de 20) na avaliação “tradicional” e se essa nota foi superior à nota “tradicional”. Em ambos os casos, os mini-testes eram opcionais.

O objetivo dos mini-testes não era avaliar os alunos, era fazê-los estudar mais, não adiar, não estudar primeiro os outros assuntos que eram naturalmente mais agradáveis para eles (já que pertencem à sua área de estudo); tornar os alunos mais conscientes do seu nível de compreensão (muitas vezes os alunos só percebem que não conseguem resolver os exercícios quando recebem as notas do primeiro teste, a mais de meio do semestre). Os estudantes habitualmente são otimistas quanto às suas capacidades (Wandel, 2015). Foi escrito no Moodle e os professores repetidamente lembraram aos alunos que o objetivo dos mini-testes era fazerem os alunos estudarem mais e estarem conscientes do seu nível de compreensão; que os alunos podiam copiar todos os mini-testes, mas, provavelmente, não obteriam os 9,0 valores necessários na avaliação “tradicional” e, portanto, estes não valeriam de nada.

Esta investigação é uma extensão natural a duas UCs do trabalho realizado com uma UC em Gaspar Martins (2016).

Os mini-testes

Os mini-testes foram criados usando a Atividade do Moodle: “Teste”, que permite a simples inserção de símbolos (em Latex) e de imagens, ver Figura 1 e 2.

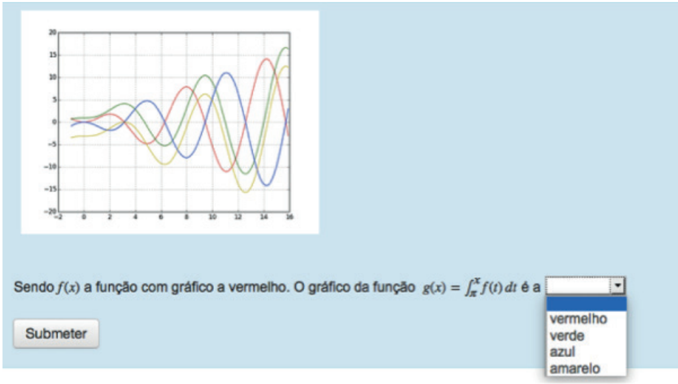


Figura 1. Pergunta com imagens e símbolos matemáticos (MAE)

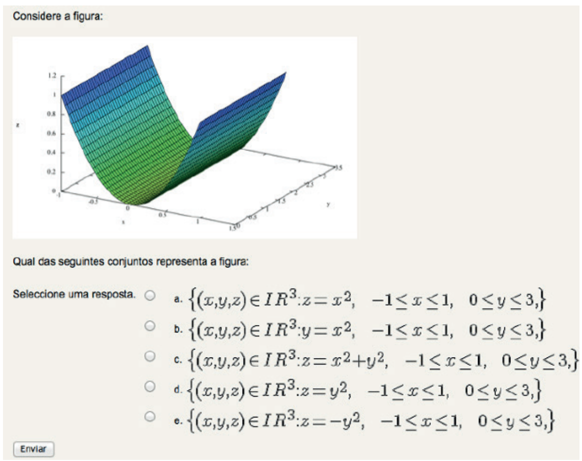


Figura 2. Pergunta com imagens e simbolos matemáticos (AM2)

Foi considerada a possibilidade de criar perguntas com instâncias diferentes para cada aluno, mas levaria muito mais tempo para criar perguntas e os alunos também saberiam como resolver um problema com uma constante em vez de um número, portanto decidimos que não valia a pena. Sempre que possível, usámos respostas numéricas ou curtas (Figura 3 e 4), em vez de respostas de múltipla escolha, já que nas respostas de múltipla escolha, com algumas tentativas, os alunos podem obter a resposta correta. O tipo de perguntas que usámos envolveu principalmente 'respostas embebidas', pois isso permite que um professor incorpore mais de uma subquestão e essas subquestões podem ser escolhidas entre todos os diferentes tipos de perguntas: numéricas, respostas curtas, escolha múltipla, verdadeiro ou falso, etc. O tipo de pergunta 'resposta embebida' permite que o professor avalie o aluno através de seu percurso e não apenas o resultado final (veja a Figura 3 e 5). O feedback só indica se a resposta está correta ou incorreta, não mostra a resposta correta.

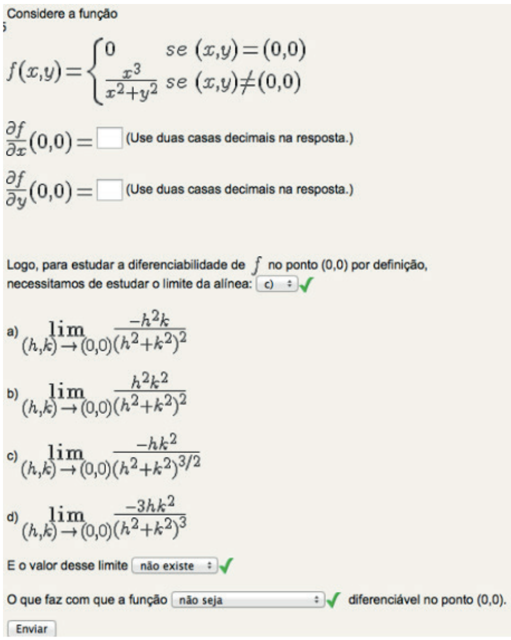


Figura 3. Pergunta com respostas embebidas que permite guiar e avaliar o aluno ao longo do caminho e não apenas na resposta final.

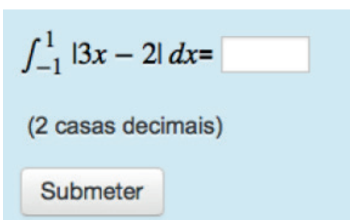


Figura 4. Pergunta com resposta numérica que não permite o aluno acertar com algumas tentativas.

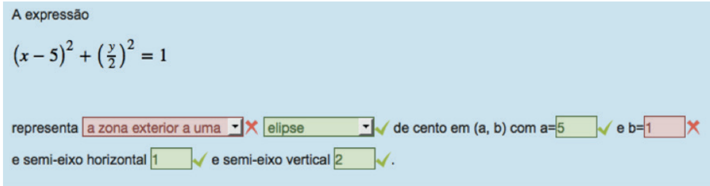


Figura 5. Pergunta com respostas embebidas que permitem avaliar um conjunto de perguntas e não apenas uma.

Com imaginação todos os temas foram avaliados (Figura 6).

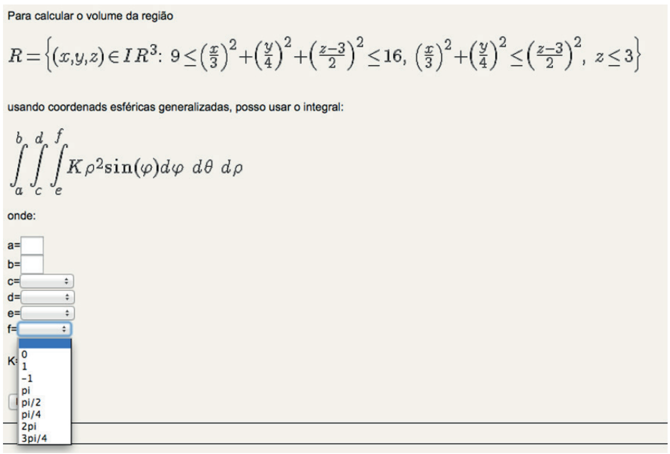


Figura 6. Uma forma imaginativa de avaliar coordenadas esféricas.

A metodologia da investigação

A questão de investigação é se os mini-testes (aplicados com esta estratégia) são uma forma efetiva e justa de aumentar a aprendizagem dos alunos. A estratégia é que os mini-testes são semanais, online, opcionais, não são gerados aleatoriamente, os alunos podem voltar a submeter sempre sem penalização e a sua nota só conta se o aluno obtiver mais de 9 valores na avaliação tradicional.

Esta questão de avaliação foi dividida em quatro subquestões:

- QI1: Os alunos aderiram aos mini-testes?
- QI2: Que perceção têm os alunos acerca dos mini-testes?
- QI3: Os mini-testes geram injustiça?
- QI4: Os mini-testes aumentaram as notas dos alunos?

Com vista a responder às questões de investigação realizou-se uma quase-experiência, não é uma experiência porque as alterações não foram apenas os mini-testes, embora o currículo seja o mesmo, uma vez que houve outro professor responsável isso faz alterar a abordagem à UC. Como instrumentos utilizou-se um questionário sobre os mini-testes, os dados dos mini-testes e as notas durante vários semestres.

Disponibilizou-se o questionário anónimo no Moodle para todos os estudantes. A amostra de alunos que respondeu ao questionário foi razoável. Dos 104 alunos inscritos a AM2, todos inscritos no Moodle, 65 responderam ao questionário. Dos 108 alunos inscritos a MAE, 94 no Moodle, 61 responderam ao questionário. Além disso, separando os alunos pela sua nota no 1º teste (o questionário foi disponibilizado antes do 2º teste) o número de alunos que responderam o questionário com uma dada nota correlaciona-se razoavelmente com o número de alunos com essa nota. Os coeficientes de correlação de Pearson são = 0.6 e = 0.5 respetivamente.

QI1: Os alunos aderiram aos mini-testes?

AM2 tinha 104 alunos inscritos, 79 foram a uma avaliação tradicional e 76 responderam a pelo menos um mini-teste. A nota final dos mini-testes era a média das 10 melhores notas entre as 14 o que justifica uma menor adesão nos últimos 4 mini-testes. O que fez com que alterássemos esta norma para MAE onde contaram os 12 melhores mini-testes.

MAE tinha 108 alunos inscritos, 103 foram a uma avaliação tradicional e 93 responderam a pelo menos um mini-teste. A nota final dos mini-testes era a média das 12 melhores notas entre as 14 disponíveis.

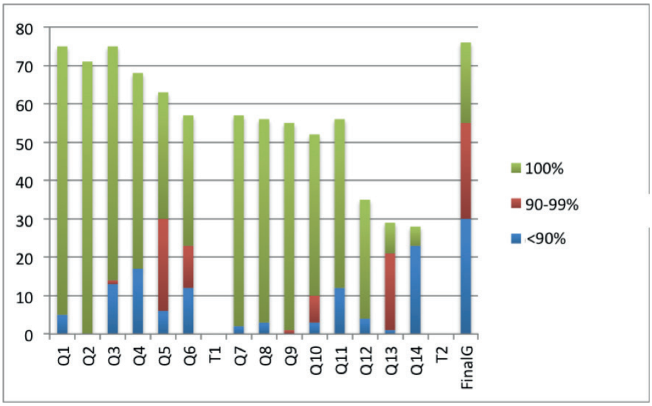


Figura 7. O número de alunos que responderam aos mini-testes de AM2, divididos por nota.

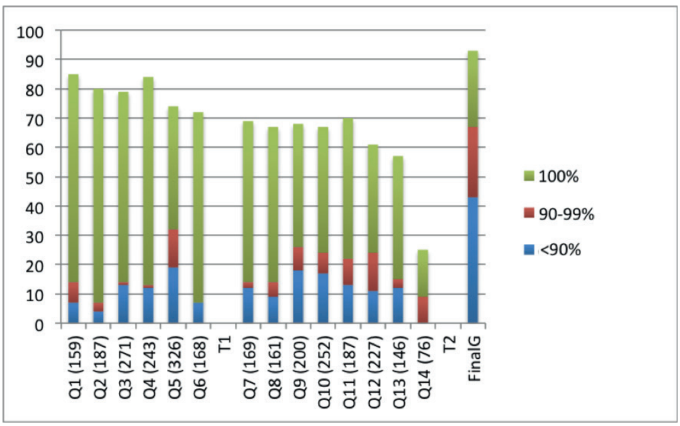


Figura 8. O número de alunos que responderam aos mini-testes de MAE, divididos por nota.

Uma grande porção de alunos obtiveram nota máxima (Figura 7 e 8) o que era esperado dado que os mini-testes eram iguais para todos os alunos e os alunos podiam votar a tentar sem ter penalização. Os mini-testes não eram obrigatórios e só contavam para nota se o aluno tiver 9 ou mais valores na avaliação. Por isso seria natural que muitos estudantes não respondessem aos mini-testes. No entanto, em geral, mais de metade dos alunos inscritos responderam a grande parte dos mini-testes.

Um resultado objetivo é que, apesar de serem opcionais 93/108=86% e 76/104=73% dos estudantes inscritos responderam a pelo menos um mini-teste. Todos os mini-testes tiverem uma alta taxa de resposta.

QI2: Que perceção têm os alunos acerca dos mini-testes?

A Figura 9 mostra que mais de 90% dos alunos consideram os mini-testes úteis.

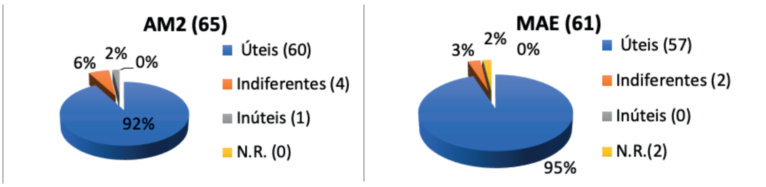


Figura 9. Percentagem de resposta de alunos a "os mini-testes foram..."

Mais de 60% dos alunos respondeu que os mini-testes o fizeram estudar mais (Figura 10).

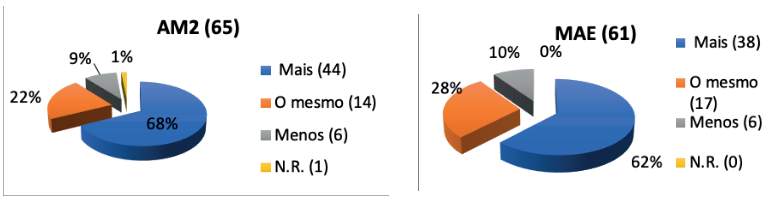


Figura 10. Percentagem de resposta de alunos a "os mini-testes fizeram-me estudar..."

A Tabela 1 mostra que nenhum dos alunos achava que os mini-testes não eram de interesse e não se importavam com os mini-testes, enquanto uma grande percentagem afirmava que os mini-testes os lembravam de estudar, mostravam o nível que alcançavam levando-os a estudar novas matérias; mesmo matérias que os alunos pensavam ter entendido mas na realidade não tinham.

Tabela 1. Resposta dos alunos a "selecione TODAS as afirmações com que concorda ..."

Os mini-testes...	AM2 (N=65)		MAE (N=61)	
lembram-me de estudar todas as semanas.	55	85%	50	82%
mostram-me que há partes que eu pensava que compreendia, mas não.	48	74%	53	87%
ajudam-me a ter uma melhor perceção do nível que estou a atingir.	47	72%	38	62%
aprendo coisas novas ao responder-lhes.	33	51%	35	57%
não têm interesse.	0	0%	0	0%
não me interessam, apenas copio os resultados.	0	0%	1	2%
não me interessam, nem sequer copio os resultados.	1	2%	0	0%
stressam-me demasiado.	3	5%	6	10%

Resumindo, mais de 90% dos alunos consideraram os mini-testes úteis; mais de 60% afirmaram que estudam mais devido aos mini-testes. Os alunos afirmam que os mini-testes os lembram de estudar, mostram que havia partes que eles achavam que tinham entendido, mas não entenderam, encorajaram-nos a aprender novas matérias e proporcionaram-lhes uma melhor perceção do nível que estavam a alcançar.

QI3: Os mini-testes geram injustiça?

Na vida cotidiana como professora, várias vezes outros professores me dizem que a principal razão para não usar mini-testes online é que os alunos podem copiar e isso pode gerar injustiça. Para evitar esse problema, enfatizou-se fortemente aos alunos que os mini-testes eram muito mais relevantes como avaliações formativas do que como avaliações sumativas; os alunos poderiam resubmeter o mini-teste sem penalização para os estimular a tentar responder por si mesmos sem medo de serem penalizados; além disso incluiu-se uma cláusula que os mini-testes só contam para nota se os alunos obtiverem valores de 9.0 (de 20) em avaliações tradicionais, como em Varsavsky (2004). Como resultado, as respostas à pergunta "Os mini-testes geram injustiça?" mostram que pouquíssimos alunos consideram os mini-testes injustos (ver Figura 11).

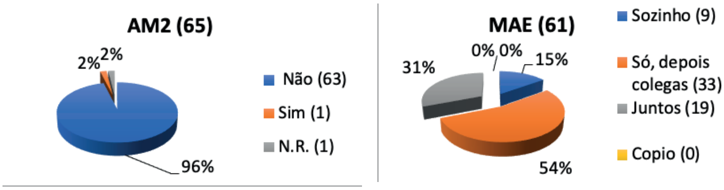


Figura 11. Percentagem de resposta dos alunos a "Os mini-testes geram injustiça?"

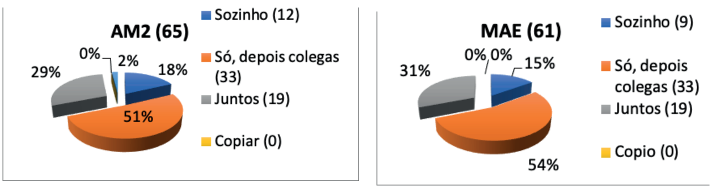


Figura 12. Percentagem de resposta dos alunos a "Como é que respondeu aos mini-testes?"

Quando questionados nenhum aluno afirmou ter copiado os resultados (ver Figura 12).

Portanto, com esta abordagem, o nível de injustiça dos mini-testes não é considerado relevante.

QI4: Os mini-testes aumentaram as notas dos alunos?

De acordo com a Figura 13, cerca de 70% dos alunos que responderam o questionário consideram que os mini-testes contribuíram para que obtivessem uma melhor classificação.

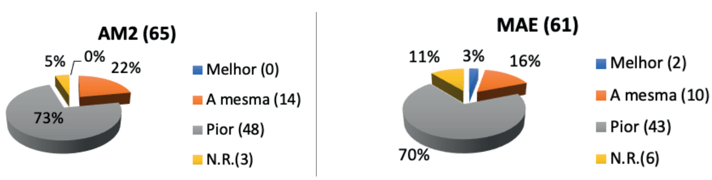


Figura 13. Percentagem de resposta dos alunos a "Sem mini-testes a minha nota teria sido... "

Os dados das Tabelas 2 e 3 referem-se a cinco professores responsáveis / abordagens e treze professores diferentes. O programa era essencialmente o mesmo nos semestres, mas muda o professor responsável e, portanto, as abordagens eram naturalmente diferentes.

Nos semestres de intervenção aconteceu o mesmo. Como existe um número tão grande de professores responsáveis e abordagens quase podemos afirmar que os mini-testes foram a única variável diferente naquele semestre. Mas, com rigor profundo, consideraremos que não podemos atribuir diferenças de notas diretamente aos mini-testes.

Para AM2, a taxa de aprovação quase duplicou nesse semestre, a nota média também aumentou significativamente.

Tabela 2. Notas a AM2 em dez semestres, o professor responsável está a sublinhado e o semestre da experiência está sombreado a azul.

AM2	2010/11		2011/12		2012/13		2013/14		2014/15		2015/16	
	S1	S2	S1	S2	S1	S2	S1	**S2**	S1	S2	S1	S2
Inscritos	101	200	128	153	90	123	80	**104**	56	66	56	108
Aprovados	27	38	31	41	20	23	12	**54**	10	19	16	33
Nota média dos aprov.	11.7	11.8	12.3	11.7				**13.9**	12.4	11.5	11.7	11.5
Aprovados/Inscritos	27%	19%	24%	27%	22%	19%	15%	**52%**	18%	29%	29%	31%
Professores	A+…	A+…	A+…	A+…	A+B	A+C	D+E	**F+G+ H**	D+F	D+I	J+K+I L	J+K+I

A nota de MAE e a nota média tiveram o maior valor no semestre experimental.

Tabela 3. Notas a MAE em dez semestres, o professor responsável está a sublinhado e o semestre da experiência está sombreado a azul.

MAE	2011/12	2012/13	2013/14	2014/15	**2015/16**
	S1	S1	S1	S1	**S1**
Inscritos	73	109	121	125	**108**
Aprovados	17	30	58	56	**61**
Nota média dos aprov.	12.7	12.2	13.5	12.7	**13.5**
Aprovados/Inscritos	23%	28%	48%	45%	**56%**
Número de mini-testes	0	6 em aula	5 em aula	5 em aula	**14 online**
Professores	A	A	A	A+B	**B+A**

Resumindo, cerca de 70% dos questionados afirmaram que, devido aos mini-testes, obtiveram uma nota melhor. A taxa de aprovação e a nota média aumentaram significativamente nos semestres da intervenção, o que é um indicador positivo, mas não pode ser diretamente atribuído aos mini-testes.

Uma das maiores fraquezas do estudo é que o professor responsável é sempre o investigador e, além do currículo permanecer o mesmo, os mini-testes não são a única parte do curso sujeito a alterações. No entanto, como este estudo envolve tantos professores responsáveis diferentes e tantos professores, o enviesamento torna-se menor.

Conclusões

Dois conjuntos de 14 mini-testes semanais no Moodle estiveram disponíveis para todos os alunos de engenharia em duas unidades curriculares de matemática: Cálculo em IR e em IR^n. Conforme é recomendado por Myers e Myers (2007), foram utilizados muitos mini-testes. Os mini-testes não eram obrigatórios, e só contavam para a classificação se o aluno obtivesse mais de 9 dos 20 valores nas avaliações tradicionais, não eram gerados aleatoriamente e os alunos podiam resubmetê-los sem penalidade. Segundo Varsavsky (2004), isso reduz a injustiça. A pergunta de investigação é: "Os mini-testes (aplicados com esta estratégia) são uma ferramenta justa e eficaz para aumentar a aprendizagem dos alunos?" Como vimos na introdução, há vários casos em que os mini-testes não eram uma ferramenta útil (Shorter and Young, 2011; Blanco, Estela, Ginovart e Saà, 2009)

Nas respostas ao questionário, mais de 90% dos alunos consideraram os mini-testes úteis; mais de 60% afirmaram que estudaram mais devido aos mini-testes; os alunos concordaram que os mini-testes os faziam lembrar de estudar; mostrou-lhes que havia partes que eles achavam que entendiam, mas não entendiam; fez com que aprendessem novas matérias e deu-lhes uma melhor perceção do nível que estavam a atingir.

Os mini-testes não eram obrigatórios, portanto os alunos podiam simplesmente ignorá-los. No entanto, uma grande proporção de alunos respondeu aos mini-testes e respondeu até os últimos.

As perguntas do mini-teste não foram geradas aleatoriamente, portanto, todos os alunos receberam as mesmas perguntas e, naturalmente, os alunos partilharam as soluções uns com os outros. Para evitar a injustiça, enfatizou-se fortemente que os mini-testes eram importantes para os alunos, para permitir que eles se testassem e recebessem feedback sobre seu nível de compreensão. Além disso, os mini-testes só contribuíram para as notas se os alunos obtivessem mais de 9 valores em 20 nas avaliações “tradicionais”. E se um aluno copiar muitos resultados do teste, provavelmente não atinge a nota mínima e não terá valido a pena. O resultado foi que, nas respostas ao questionário, pouquíssimos alunos afirmaram que os mini-testes eram injustos.

Mais de 70% dos entrevistados afirmaram que, devido aos mini-testes, obtiveram uma nota melhor. A taxa de aprovação e a nota média aumentaram significativamente nos semestres em que os mini-testes foram aplicados, o que é um indicador positivo, mas não pode ser diretamente atribuído aos mini-testes.

Esta investigação sugere que estes mini-testes, com esta estratégia, são uma ferramenta justa e útil para aumentar a aprendizagem dos alunos, por isso é recomendado apoiar o ensino.

Como trabalho futuro, vamos testar mini-testes em outros cursos, com outros professores e com outros professores responsáveis para fortalecer a validade desta investigação.

Referências

Beichner, R. J., Saul, J. M., Abbott, D. S., Morse, J., Deardorff, D., Allain, R. J., ... & Risley, J. S. (2007). The student-centered activities for large enrollment undergraduate programs (SCALE-UP) project. *Research-based reform of university physic*s, 1(1), 2-39.

Blanco, M., Estela, M. R., Ginovart, M., & Saà, J. (2009). Computer assisted assessment through moodle quizzes for calculus in an engineering undergraduate course. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 19(2), 78-83.

Booth, D. J. (2012). Managing Mathematics with CALMAT. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education* (formerly CAL-laborate International), 2(1).

Caridade, C. M. R., Faulhaber, M. C., Rosa, P. M., Silva, P. M., & Baeta, N. S. (2012). Teaching Calculus using e-learning in a Moodle platform. *Atas TicEduca* 2012.

Dori, Y. J., & Belcher, J. (2004). Improving Students’ Understanding of Electromagnetism through Visualizations-A Large Scale Study. In Paper submitted to the *2004 NARST Annual Meeting – the National Association for Research in Science Teaching Conference*, Vancouver. Online at< http://web.mit.edu/jbelcher/www/TEALref/dori.pdf

Gibbs, G. (2000) Changing student learning behaviour outside of class. Essays on teaching excellence. *The Professional & Organizational Development Network in Higher Education.* 11. Available from: http://podnetwork.org/content/uploads/V11-N1-Gibbs.pdf

Hill, M., Sharma, M. D., & Johnston, H. (2015). How online learning modules can improve the representational fluency and conceptual understanding of university physics students. *European Journal of Physics*, 36(4), 045019.

Lasry, N., Mazur, E., & Watkins, J. (2008). Peer instruction: From Harvard to the two-year college. *American Journal of Physics*, 76(11), 1066-1069.

Lawson, D. (2012). Computer-aided assessment in mathematics: Panacea or propaganda? *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education* (formerly CAL-laborate International), 9(1).

Martins, S. G. (2016). Weekly online quizzes to a mathematics course for engineering students. *Teaching Mathematics and its Applications,* hrw011.

Myers, C. B., & Myers, S. M. (2007) Assessing assessment: The effects of two exam formats on course achievement and evaluation. *Innovative Higher Education,* 31, 227-236.

Shorter, N. A., & Young, C. Y. (2011). Comparing assessment methods as predictors of student learning in an undergraduate mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 42(8), 1061-1067.

Siew, P. F. (2003). Flexible on-line assessment and feedback for teaching linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 34(1), 43-51.

Thiel, T., Peterman, S. & Brown, M. (2008) Addressing the Crisis in College Mathematics: Designing Courses for Student Success, *Change: The Magazine of Higher Learning*, 40:4, 44-49, DOI: 10.3200/CHNG.40.4.44-49 http://dx.doi.org/10.3200/CHNG.40.4.44-49

Tuckman, B. W. (1998). Using tests as an incentive to motivate procrastinators to study. *The Journal of Experimental Education*, 66(2), 141-147.

Twigg, C. A. (2005). *Course Redesign Improves Learning and Reduces Cost*. Policy Alert. National Center for Public Policy and Higher Education.

Varsavsky, C. (2004, December). *Can online weekly quizzes contribute to learning in mathematics.* In Proceedings of the 9th Asian Technology Conference in Mathematics, 2004, Singapore.

Wandel, A. P., Robinson, C., Abdulla, S., Dalby, T., Frederiks, A., & Galligan, L. (2015). Students' mathematical preparation: Differences in staff and student perceptions. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education* (formerly CAL-laborate International), 23(1).

Capítulo 5

Colin Steele

Academic Malpractice and Diagnostic Testing

Academic malpractice and diagnostic testing are two areas that impinge on the education of students of mathematics and students who are taking mathematics as part of studies in a different subject. The former is one that students staff and students should be actively trying to avoid while the latter is something that can be very useful to both staff and students.

1. Academic Malpractice in Mathematics

The Journal of University Teaching and Learning Practice (listed among references) has, among its most prominent statements, the "Publication Ethics and Malpractice Standards" with the first of eight bullet points being "Originality and Plagiarism – All manuscripts must be the original work of authors and not evidence plagiarism".

The need to create and submit original work is fundamental to many activities. It is mentioned above in the context of research (indeed research into teaching activities) but also is relevant in business, in medicine, in many other fields but the context for this work will be teaching and assessment.

Types of malpractice

There are several different types of academic malpractice affecting teaching and assessment

- Plagiarism: the re-publishing or the submission of previously-submitted work without correct submission and claiming it to be the work of the person submitting rather than the original author.
- Contract work: where a person submits work that he or she has not created but, instead, has asked others to create, sometimes involving a financial or other contract.
- Impersonation: Where a person, other than the named individual, presents some work, giving the impression of being the named individual.
- Collusion: Where instructions are for students to work individually but some students work together or allow the work of one student to be passed off as the work of another student within the group.
- Use of unauthorized materials: Where, a student makes use of forbidden materials e.g. some illegal notes or an unauthorized piece of electronic equipment (e.g. calculator).

There are, of course, times when a particular situation consists of a combination of the categories above.

Why is mathematics different ?

In many disciplines, particularly those based around the submission of essays, plagiarism and contract work are among the most prominent issues. It is true that such issues do affect mathematics in projects and similar work. Similarly, mathematics takes its share of impersonation and the use of unauthorized materials. However, mathematics is more open to collusion than other subjects. The simple act of copying work from one student to another confuses the system and allows students to gain marks without having satisfied the learning outcomes.

It is often the case at university that central authorities will adopt a system to cater for essay-based subjects but, in doing so, neglect subjects such as mathematics where is it collusion (or more specifically copying) which is the problem. Again, these are problems which do not occur in invigilated exams but which are more likely in coursework assignments.

Types of copying

The types of copying can vary a lot depending on the nature of the assignment. One possibility is that a student (A) has difficulty in some questions on a particular assignment and is able to persuade another student (B) to show his/her work in some manner and student A then submits the work of student B claiming that it is the work of student A. Careful analysis from those marking the work will reveal that the same work was submitted by more than one student.

A more extreme example of this is when student A has not made significant progress with any part of the assignment and the deadline is approaching. In those cases, student A will often copy out the entirety of the work of student B, sometimes in a quite sloppy manner. Another possibility is that the two pieces of work can be submitted at virtually the same time leading to a marker seeing them in quick succession and resulting in there being little doubt that the similarities between the two will be noted.

In such cases, often it is not just the similarities which are noted. Clearly, similarities where things are wrong are more likely to give rise to suspicion. However, such matters repeated unusual notation give rise to suspicion as do some of the mistakes made while copying. Simply writing down some mathematics without thinking about it can give rise to errors which can consist of total nonsense. In one example seen by the author, two students submitted virtually identical answers for the entirety of an assignment with the unusual feature being that one complete question and the majority of a second question had been answered twice with the second attempts being at exactly the same non-consecutive place in the document.

Are students penalised ?

Generally, when copying or a similar offence is suspected, university schools or departments will investigate and will interview all students concerned. This can be a somewhat unpleasant procedure on both sides and brings staff and students into direct opposition. Depending on the result of the investigation, students can be acquitted or can be given penalties ranging from a warning through loss of marks to, for repeat offenders, more serious penalties. It should be noted that, in many cases, the student providing the work for copying pays the same penalty as the individual copying the work.

IMA Malpractice Meeting

It was against this background that a meeting took place in Manchester, UK in May 2018 with funding from the UK Institute for Mathematics and its Applications IMA. Some of the ideas from this meeting are mentioned in the narrative below.

Course Malpractice Models

Prior to the meeting, many delegates felt that it was necessary to be prepared for malpractice while setting coursework. This marks the difference between a 'stage 1' model where the malpractice is treated when it occurs (Figure 1) and a 'stage 2' model where the possibility of malpractice is raised (and partly accounted for) when any coursework is written (Figure 2)

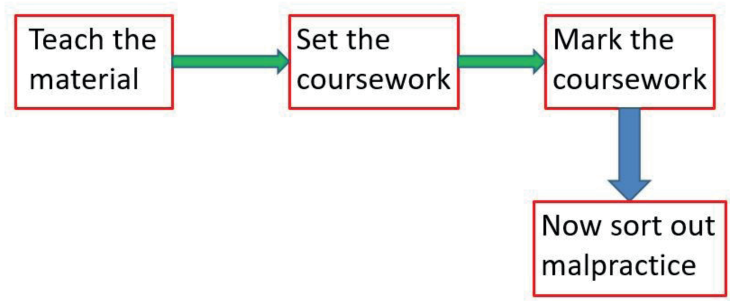


Figure 1. Stage 1 model for academic malpractice in coursework.

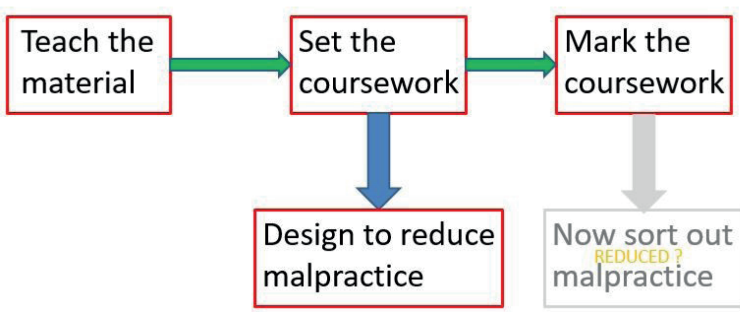


Figure 2. Stage 2 model for academic malpractice in coursework. The possibility of malpractice is raised while designing the coursework.

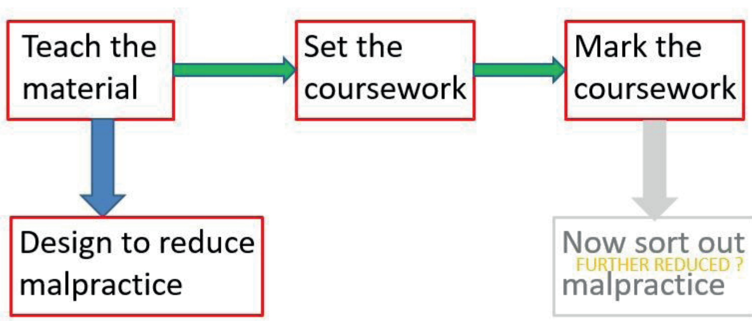


Figure 3. Stage 3 model for academic malpractice in coursework. The possibility of malpractice is considered while designing the course.

Why may students engage in malpractice ?

Some thoughts on why students engage in malpractice were provided by Professor Chris Good (University of Birmingham). Often gaining credit (generally in the form of marks) is behind students 'straying into the realms of malpractice'. On the other hand, if credit is not given for coursework (hand-in assignments), students generally do not hand work in and thus miss out on feedback etc. On the other hand, students gain by working together, explaining work to others and this should be encouraged.

Reasons for taking some kind of action include

- Unfair on honest students who will see others 'illegally' gain higher marks thus devaluing the marking process.
- Lack of feedback on THEIR OWN WORK to students engaging in malpractice causing such students to suffer in the higher-stakes assessment e.g. end-of-semester exams.
- Damage to institutional integrity and part of academic duty.

Some ways forward include

- The unsatisfactory option of taking no action
- Take retrospective action at the cost of staff time and antagonisation of students
- Allow students to work together but acknowledge the fact (perhaps with a slight reduction of marks for larger groups)
- Assess solely on end-of-semester examinations (but note that this may be to the detriment of some students, but to the benefit of others) or use invigilated in-class tests rather than take-home assignments.

Simple Stage 2 Models

A simple feature which can be added to any take-home assignment is a statement about what is allowed and what is not allowed. Sometimes students will work together and submit the combined work twice; such practice may be acceptable in certain parts of the world. Alternatively, students may have a constructive discussion about general points but that discussion may stray into 'forbidden' territory i.e. the students may end up discussing the specific examples. If the instructions include details of the 'line which must not be crossed', then this may steer students away from any malpractice (Figure 4)

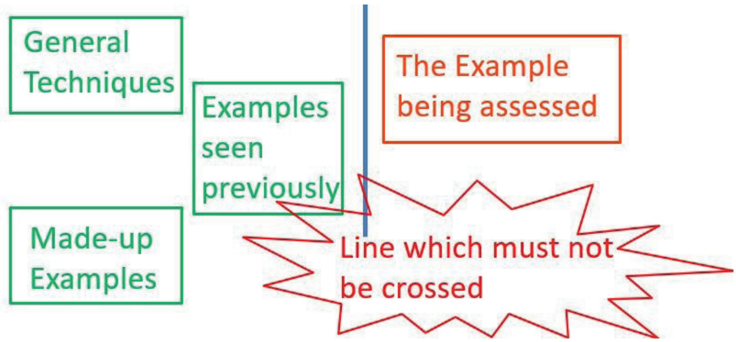


Figure 4. Making clear the distinction between previously viewed examples and the example under consideration.

Many universities offer students access to electronic or other courses where students can learn about the principles of malpractice and, in particular, how they apply in that particular institute. For example, the University of Manchester offers courses in academic malpractice as it applies to

- General Academic Writing
- Computer Programming
- Mathematics

An advantage of these courses being electronic is that students can be asked to acknowledge particular statements and/or answer various quiz questions. There is therefore a trail where students are recorded as having acknowledged various principles and cannot therefore plead ignorance.

Dealing with the assessment itself, one way to modify assessment is to have in-class tests rather than take-home assignments. As these are invigilated, any acts of collusion are nullified. However, there are some possible shortcomings.

- There are often advantages to giving students an assignment where they are expected to explore a situation and this would not be appropriate to shoehorn into a test which could be one hour or less.

- Often it is useful to have a 'different form of assessment' for coursework and for exams. There may be some that would feel that an invigilated test is too close in nature to an exam.
- Related to the points above, a coursework test as opposed to a hand-in assignment, may be seen as a particularly high-pressure situation.

A variation on this is to publish a set of questions in advance of an in-class invigilated session. The actual test questions can form a (proper or improper) subset of the practice questions. A possible drawback is that students may collude and will end up simply memorising the solutions and reproducing them, perhaps without true understanding.

Alternatively, the test questions can be similar to a (proper or improper) subset of the practice questions, sufficiently similar that work carried out during practice, if understood, can be used to positive effect in the actual test. Students will be able to work on questions and benefit from the work that they do provided that they do actually understand what they are doing.

Computerised Testing

The use of technology for assessment presents some interesting opportunities but accompanying challenges when it comes to ensuring the absence of any malpractice. While one of the main advantages of computerised assessment is the instant feedback, the ability of many systems to use parameters to ask dozens, hundreds, thousands (or even more) questions is also of great importance. A very important use of this ability is to allow a single student to carry out the assessment many times, hopefully putting into practice the feedback from each attempt while carrying out the next attempt. However, a further implication is that each student will receive a slightly different set of questions. Each question will be perfectly valid in its own right, will test the same learning outcomes and should have the same level of difficulty.

Consider the factorisation of the quadratic x^2+(a-1)x-a for different values of a parameter a. Parameter values of a = 4,5,6 give the quadratics x^2+2x-8, x^2+3x-10 and x^2+4x-12 which are all about the same level of difficulty while use of a = 26 gives x^2+24x-52 which is a significantly harder expression to factorise. Similarly, use of a = 0 or a = 2 gives x^2-2x and x^2-4, both fundamentally easier than the examples with a = 4,5,6. While it is creditable to use a parameter to help defeat malpractice (and to increase the number of examples available for students), it is advisable not to be too greedy and to keep parametrised examples all of a similar level of difficulty. It should be stressed that students would see the result of the parameter in the question, not the parameter itself.

While each student having different questions is a barrier to any malpractice taking place, a keen student may wish to answer questions for other students or to reverse-engineer the randomisation and take part in pattern recognition. While this is a more difficult thing for students to do, it is also a more difficult thing to catch. Given that intermediate results are not always required, it is also possible that students are using other computerised tools e.g. Wolfram Alpha to carry out the questions.

Perhaps one regime to take advantage of the flexibility of computerised assessment is to allow multiple 'practice' attempts with the best one to count a particular fraction of the assignment (e.g. 20% to 50%). The remainder of the assessment can come from a single 'assessment' attempt which is carried out in invigilated conditions with students unable to communicate with each other or to use any other software. Of course, it is acknowledged that this approach may put unreasonable strain on bookings for computer clusters; it may be appropriate for small/medium-sized classes rather than large ones.

Lessons for in-class tests

The use of parameters (but not randomised) can also be of great use when it comes to in-class tests (but for significantly different reasons). While it can be assumed that for end-of-unit examinations, there is enough room in the exam-hall for each student, effectively, to be isolated from all other students, the same assumption cannot be made for in-class tests. Sometimes these tests take place in the same rooms used for weekly support-classes. On some occasions, the room will be fuller for the test than it will be for the weekly class (absenteeism for the weekly class) while on other occasions, the test will take place during the weekly class. The upshot is that, on occasions, the guarantee cannot be made that students will not see materials on the desks of fellow-students.

While effective invigilation is key to preventing any malpractice in such a test, some progress can be made by having several different versions of the test. The questions on the different versions can vary from each other by means of having different parameters i.e. they vary in the same manner that different instances of a question vary in computerised assessment. The difference here is that there are only a SMALL number of different combinations of the questions and each one will be repeated a fair number of times so it is possible that a significant fraction of the class could feel that the randomisation worked against them in the same way. Obviously, trying to equalise the difficulty of the questions makes things much easier.

Below (Figure 5) are ways in which six versions of a test can be utilised. In these cases, students will not be able to see the script from the student three places to their left or right. Similarly, they will not be able to see (partly due to the student him/herself being in the way), the script from the student two places in front. This applies even if each row is displaced 'horizontally' from the row in front (second diagram)

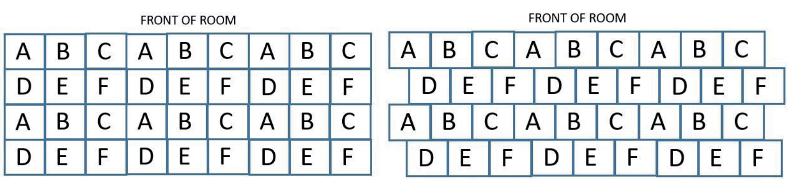


Figure 5. Arrangements for six different versions of a test.

Clearly, any invigilators need to be fully aware of the plan and of the resulting pattern e.g. setting up the pattern before letting students into the room. There is no real need to make students aware in advance. However, the solutions/feedback document will need to be significantly longer or, perhaps less ideally, to have some reference to parameters in it.

It could be argued that one drawback is that the 'question stems' are still the same and that students can (in some circumstances) see some general features of the attempts of nearby students. Of course, this advantage can be negated by publishing the question stems in advance (see earlier model).

Often fewer than six versions are used and, of course, the ideal situation is to have sufficient room that it is not necessary to try this kind of arrangement.

Take-home assignments and parameters

The principle of working with parameters can be extended to take-home assignments. However, in such cases, the set of different versions should be considerably greater and ideally each student should have a unique set of questions. The alternative would be students checking up on the parameters that other students have in the hope of finding a match rather than on actually doing the work.

Marking this kind of work can be tiresome as the number of variations used is considerable. Clearly, it is possible to set up some software to write out the solution for each individual case. However, markers will have fewer signals to get used to. Also, trying to adapt the software to cover several different common mistakes while covering different combinations of parameters may not be feasible.

It is possible to ask students to generate their parameters on the basis of e.g. their student ID number. Alternatively, it is possible to create some software that generates a list on this same basis or which generates a particular version of a question to be delivered to the relevant student.

Self-set parameters

An alternative to specifying parameters is to give students some flexibility within a question. Below (Figure 6) are questions set in 2017 or 2018 in assignments at the University of Manchester

3. On the basis of formulae for $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ and $\tan(A+B)$, find a formula for $\cot(A+B)$ in terms of $\cot A$ and $\cot B$.
   Select (integer-degree) values $0^\circ < A < B < 90^\circ$ and verify that your formula holds for these values.

5. Give examples of functions with each of the following characteristics
   (a) One maximum, one stationary point of inflection and no other stationary points.
   (b) Two minima and no other stationary points.

   In each case draw a sketch of your function and provide a calculation justifying the behaviour.
   possible functions were

Figure 6. Questions set previously at the University of Manchester

The intention is that students could explore and produce some of their own cases even if there had been some common ground for the first part of e.g. question 3. In practice, students choose from the well-known cases of 30, 45 and 60 degrees rather than being adventurous e.g. 24 degrees or 71 degrees. However, the principle can surely be developed so that students choose a case to investigate that will not be the same as other students.

Submission of computer software

An example of submission of computer software files was presented by Dr Simon Pearce (then of University of Manchester, now of University of Liverpool). Assignments where students develop a situation using pieces of software are not well suited to invigilated test conditions and are more commonly of the nature where students submit a mini-project developed over some time. For various reasons, e.g. starting late, genuine lack of understanding etc, some students are tempted to copy code from other students, clearly a malpractice offence.

Many pieces of software record a ‘history’, some more thoroughly than others. The piece of software in question here i.e. Wolfram Mathematica keeps a record of when the various commands were executed and this can be displayed in various informational and graphical means. Students are given a 'skeleton' file to start developing and it can be traced whether this file is unique from the point where it was uploaded for the purpose of being downloadable to students.

In the assignment in question, students are asked to use Mathematica for a variety of exercises in polar and rectangular curve sketching, integration, solution of questions etc. At the beginning, students are asked to generate a parameter and this parameter governs many of the exercises to follow. The procedure mentioned above guards against the situation where students would take the completed file of another student and then regenerate the parameter and use the new value to carry out the various questions using the code developed by the original student. Of course, similarities in the layout would lead to suspicion of academic malpractice but the procedure above would provide much stronger evidence.

However, with approaching 200 students on the course, there would be in excess of 10 000 pairings of students and the procedure could only be carried out where suspicion already existed. A different procedure would be needed to search actively for pairings.

The Mathematica files concerned consisted of two main parts i.e. the commands entered by the students and the responses of the computer to these commands. A piece of software could separate the two parts and then start comparing the various 'command parts' with a view to producing a 'distance' between each pair of files. The distance between two unrelated files would be in the hundreds of thousands or higher but several clusters appeared in the hundreds or even closer. Those clusters where then analysed using traditional methods etc.

This idea can, of course, be translated to other pieces of software but differences between the pieces of software and the nature of the assignment would need to be taken into account.

The development of stage 3 models

At the IMA meeting in Manchester in May 2018, several ideas were put forward pointing the way towards stage 3 models.

Confident students do not cheat

Some thoughts were put forward by Prof. Alexandre Borovik (University of Manchester) who noted work from Denizhan (2014) suggesting that students engaging in malpractice lacked the ability to "evaluate their own performances independent of external measurement" i.e. they students did not, or could not, engage in the practice of checking if their own results exhibited internal consistency and bore certain consistencies with the question.

Some students are used to having work marked more frequently or are used to seeing solutions given after assignments or seeing solutions to past-papers. However, they are often not used to checking results at the time and have no confidence in any answers that they produce; this can lead to copying from friends. Furthermore, the solutions to past-papers etc. generally contain ONE solution or one particular way of writing the solution. Students, upon seeing that a published answer is of a different form to their own answer may draw the conclusion that their own answer is incorrect when this need not be the case.

For example, in the case of a solution of three linear equations (but only two INDEPENDENT equations) in three variables, the solution (when it exists) may be expressed in terms of a parameter. Different correct solutions may be trivially different e.g. different symbol for the parameter or may be more substantially different e.g. have a different variable equal to the parameter or have the parameter scaled in some way. Simply looking at the forms of solution may confuse some students but substituting the solution into the equations will show that the equations are satisfied and the solution is correct. Alternatively, if the solution does not satisfy the check, this can give useful information about where to start looking for a possible error.

Thus, a proposed stage 3 model for reducing malpractice is to encourage students, as a matter of routine, to check answers whenever possible.

Indeed, work by Dehaene (2018) suggests that the brain reacts (electromagnetic impulses) to errors even if they are not registered by the conscious part of the mind. Any attempts to bring the concept of errors within the conscious part of the mind will be well-rewarded in terms of student confidence.

Different forms of assessment

Prof Jeremy Levesley (University of Leicester) began by asking the question 'Is an exam the test of ability to plagiarise from memory'. This is a reminder that, no matter how sophisticated the assessment and how well invigilated it is, examiners need to guard against students memorising material without understanding it. Once again, this links back to the way that material is taught under a stage 3 model.

A couple of novel ideas were also mentioned. While staff-time-intensive, oral exams do enable followup questions in a way that traditional exams do not. Another suggestion concerns students who appear 'destined' for a third-class degree (or even a lower-second-class) degree. Such students may seem to bumble along in the final year without really mastering the material and may be tempted to engage in malpractice. A radical suggestion would be to award the degree at an earlier stage rather than asking students to complete what may be a fairly painful final year.

Mathematical Thinking

David McConnell described a course unit that he had developed at the University of Cardiff and how it has been designed with one of the aims being a reduction in plagiarism and other malpractice. Once again, an important principle concerns just how far collaboration (including asking on maths forum web-sites can go) and still be healthy for the students concerned. Problem sheets (perhaps leading to tests or other assessment) can exhibit a certain sameness and similar thinking among students leading to possible malpractice.

This problem-solving unit involves students working in groups of around 4 and spend some time working together on open-ended problems. Not only are there no 'answers' to be copied but the instruction to explain the mathematics being used meant that students would have to consider carefully what they wrote down. This is thus a stage 3 model with the possibility of malpractice being taken into account in the design of the course unit.

Peer Input

Dr David Sirl (University of Nottingham) described a method whereby students had input to the assessment process. Students would spend some time answering questions and would then upload the results to a 'comparative judgement' tool. Over a given period, the comparative judgement tool would enable students to see (anonymously) several 'pairs' of solutions given by two other students and to judge which of the two was the better. When the results were summed over the cohort of students (plus also some staff) and over the number of pairwise comparisons carried out by students, this enabled an assessed order to be drawn up for the submissions. It is also possible to reward students who give judgements similar to the class in general to minimise any issues of students trying to manipulate their results e.g. speculating when work belongs to their friends and biasing the results.

The implications for malpractice is that if students do engage in collusion and submit similar or identical results, it is likely that some other students (or indeed staff) will be asked to carry out a pairwise comparison with the similarities being in plain view. Such possibilities would be increased if there were several pairs of colluding students (or indeed a larger cluster).

Final thoughts

Academic Malpractice, specifically in the form of collusion is a particular problem for hand-in assessment in mathematical subjects. Unlike essay-based submissions, tools such as Turnitin do not help with detecting this kind of malpractice. While use of in-class tests can help, this can often come at the expense of limiting the kind of assessment that can be set. Instead, examiners are urged to think about just how the teaching of the course unit can be adapted to minimise malpractice.

2. Diagnostic Testing in Mathematics

Many institutes, upon the arrival of new students, will carry out a form of testing in order to help with the arrangement of students for studies. Often this is to identify a small fraction of students who perhaps need extra help but there are other reasons.

A relevant question, of course, is "why carry out diagnostic testing upon arrival at university, when admission to university has been subject to national exams ?". Of course, not all students will have taken these national exams (overseas students ?) and there can be several different awarding bodies. Furthermore there are mature students returning from employment, students progressing from Foundation Years etc. Often the previous studies play a good part in preparing the student for the degree course in general or in identifying the kind of students who will generally make a success at university. However, sometimes further work needs to be done to make sure that students are prepared for the specific courses that are encountered in the first semester at university. In addition, students can get an A or similar grade while being weak in certain sub-topics and so any weakness in these topics can show up in a diagnostic test.

One final thing that a diagnostic test can do is act as a wake-up call to students who may just have completed the longest summer in their life i.e. the longest time free from formal education who will need to catch up on some topics which may have been allowed to go rusty over the summer.

Mathematics is a particularly appropriate area for diagnostic testing for several reasons

- Students in many disciplines carry out formal courses in mathematics
- Even when there are not formal mathematics courses, students are continuously making use of mathematics and it is essential to know their proficiencies and lack of proficiency. This may be of

particular relevance on postgraduate courses where students can come from a wide range of backgrounds.

Such reasons have led to many institutes running tests in September or at other times when students arrive.

Timing of Diagnostic Tests

It is possible for a diagnostic test to be carried out in the first lecture or other class but sometimes practical arrangements dictate that a regular class is not an appropriate environment for such a test. It is often a good activity for welcome week i.e. before the classes start properly.

An early start often means that the results can be processed that bit earlier and applied to the cohort. Of course, at any time, it is difficult to have all students present. Two main and unavoidable reasons for missing a diagnostic test can be illness and visa delays. For reasons such as these, it is useful to have a catch-up session a couple of weeks into term. Sometimes one-off sessions can be arranged for an occasional student who arrives at a later stage.

Sometimes students on masters courses can arrive at any time of year and having a test ready for them can be a good idea. Students could, therefore, take a diagnostic test at any time of the year.

Methods of Diagnostic Testing

The methods of actually carrying out diagnostic testing are diverse and can vary from a take-home assignment to an oral interview. However, most instances involve a sit-down test under exam conditions.

In recent years, carrying out diagnostic testing by computer has risen in prominence. Previously, it may have taken several days to get students registered on the relevant computer system and VLE but advances have led to the ability to have students able to take multiple-choice computerised tests within a day or so of arriving. To use more sophisticated question-types e.g. STACK may involve a more intense learning curve and may not be so suitable for the very beginning of the semester.

Aftermath of Diagnostic Testing

Following diagnostic testing, several strategies are available. One option available is to use the test to identify students requiring additional help and resources at the beginning (or further into) the semester. It is possible that such students are asked to sit another test at a later time to show that they have mastered such material.

Alternatively, see paragraph below, a diagnostic test may give a recommendation for ALL students.

Diagnostic Testing in Manchester

Diagnostic Testing has been carried out in the University of Manchester since 1996 and has evolved through several stages e.g. purely on paper with short answer and then multiple-choice using successively optical reader, spreadsheet entry and, since 2012, the university VLE. However, the diagnostic test needs to be seen as part of a longer process starting before the semester and continuing well into the semester. This is a process that is undergone by students in many parts of the Faculty of Science and Engineering, students who are taking mathematics courses as a part of their studies. This covers Foundation Year as well as 1st year undergraduate students.

Students are introduced to some resources in August, prior to arriving at University. Students are informed about the diagnostic test in Welcome week (mid-to-late September), the week before teaching starts formally. They are also provided with practice questions, generally STACK questions which give an opportunity for repeated practice with randomised coefficients.

During Welcome week itself, various cohorts of students take the diagnostic test. The test lasts 40 minutes for Foundation Year students and 80 minutes for first-year students although the majority of students do leave before the end. For a particular department, there may be several sittings over the course of a morning or afternoon e.g. four sittings of about 90 students each for Foundation Year. No attempt is made to segregate students who have already sat the test from those yet to sit the test as it is explained to students that there is no mark for this test and hence no incentive to gain an advantage. Furthermore, students will not yet have go to know each other particularly well.

The test itself is multiple-choice with options C to G as well as H which means 'none of the above'. Furthermore, there are A (I have not met this before) and B (I have met this before but I have forgotten). Students are encouraged not to guess if they really do not know the answer but to put either A or B as appropriate. The questions are divided into a number of sections e.g. Section F : Exponentials and Logarithms, Section G : Differentiation and students are given and shown a profile across the sections using such terms as "Excellent", "Satisfactory", "Weak", "Cause for Concern". For some of the more ambitious topics, the terms "Borderline" or "Inexperienced" are used instead of "Weak" and "Cause for Concern".

While the tests were originally set up with the idea of streaming students into different course-units, this categorisation happens only in the Foundation Year with year 1 students being taught according to discipline. Foundation Year students are allocated to courses and the allocation communicated to them as individuals.

While, for the majority of students, the allocation to lecture courses is not done on the basis of diagnostic test results, this is the principle upon which the support-class groups are decided. These classes start in the second teaching week of the semester i.e. about two weeks after the diagnostic test. The tests are also used to inform the relevant lecturers about the general composition of skills within the groups of students and their variation from year to year.

For many students, the most visible lasting impact of the diagnostic test will be through the diagnostic followup. This is something introduced to students during the first week of teaching i.e. the week following the diagnostic test. Each student is assigned two sections from A to L and is introduced to some resources covering the subject matter of these sections and is also welcome to attend dropin sessions where questions can be asked. The exercise culminates several weeks into the semester when students are asked to carry out some computerised questions on these particular topics ; practice questions have been available since early in the semester and each question can be done an unlimited number of times.

Students who perform well in all (or all but one) sections of the original diagnostic test are assigned two 'general' sections consisting of sub-topics from several sections (or one general section as well as the single weak section).

The purpose is that students arriving in Manchester are given extra practice and instruction in areas where they are weak and can face the rest of the course with increased confidence.

Final Thoughts

Diagnostic tests allow students to have a thorough checkup of their mathematical progress with remedial action if necessary.

Conclusions

Academic Malpractice and Diagnostic Testing are important aspects of a university education in mathematics.

References

Dehaene, S. (2018). T*he Error-Related Negativity, Self-Monitoring, and Consciousness Perspectives on Psychological Science*, 13 (2), 161-165. doi.org/10.1177/1745691618754502

Denizhan, Y. (2014). P*erformance-based control of learning agents and self-fulfilling reductionism.* Systema 2(2), p61-70. http://www.systema-journal.org

*Journal of University Teaching and Learning Practic*e. https://ro.uow.edu.au/jutlp/

Capítulo 6

Luís Margalho

Acerca do uso de software livre no processo de ensino/aprendizagem de Estatística no ensino superior

A educação formal, num reflexo do que tem sucedido na sociedade, tem sofrido alterações no processo de ensino e aprendizagem, o que obriga a repensar a sala de aula, tanto na sua estrutura como na abordagem pedagógica e avaliação.

Ao longo da história o conceito de avaliação tem assumido diversas vertentes, intimamente associadas a diferentes posturas pedagógicas (Boggino, 2009). Sendo a avaliação uma componente fundamental do processo ensino/aprendizagem, esta não deve ter lugar apenas no final de um período de aprendizagem, sendo aceitável que seja fornecido aos alunos um feedback contínuo para a atribuição da avaliação final (Mendonça, 2012).

A evolução tecnológica que se tem observado nas últimas décadas permitiu a criação de variados recursos, passíveis de ser utilizados tanto no processo de ensino/aprendizagem como no processo de avaliação. De entre as diversas plataformas existentes, a plataforma MOODLE assumiu um papel de destaque, permitindo tanto a elaboração de aulas, como a elaboração de testes formativos ou sumativos (Prado, 2011).

Ao nível do ensino superior, e em particular nas áreas de tecnologia/engenharia, esta evolução não tem passado despercebida, motivando igualmente novas abordagens nos processos de ensino/aprendizagem e avaliação.

A unidade curricular de Estatística está presente na maioria dos cursos de base tecnológica, e não só, tanto ao nível do primeiro ciclo como do segundo ciclo do ensino superior. Em unidades curriculares de Estatística do primeiro ciclo será espectável um enfoque mais centrado na aprendizagem de conceitos e de processos estatísticos. Pretende-se que um aluno seja capaz de identificar, descrever e interpretar conhecimentos estatísticos. O ensino destes conceitos pode ainda ser mais ambicioso, podendo ser solicitado a um aluno que explique, por exemplo, porque a média é afetada por valor extremos e se existem outras medidas que descrevam com mais rigor os dados em análise.

No que respeita a unidades curriculares de Estatística do segundo ciclo, será desejável mobilizar processos cognitivos mais profundos, no sentido de aplicar, avaliar, criticar os conhecimentos já adquiridos, no sentido de os generalizar a aplicações e problemas do mundo real.

O ensino baseado em atividades desenvolvidas com recurso a software de estatística é, então, de grande importância a nível de ensino superior (Nikiforidou, Lekka, & Pange 2010). Embora a compreensão de conceitos se torne mais facilitada com a introdução de um suporte de simulação, há também que ter em conta o risco existente de apenas ensinar a utilizar um software de estatística em vez de ensinar Estatística (Pimenta, 2006).

De entre os diversos software de estatística disponíveis no mercado, o R (R Core Team, 2020), sendo de distribuição livre, tem vindo a ganhar cada vez mais popularidade a nível de ensino superior. Em linha com este aumento na popularidade, muitas publicações têm surgido sobre o ensino de Estatística com recurso a este software, tanto artigos científicos (Taylor, 2010, Gomes e Sousa, 2018, por exemplo), como a publicação de livros (Dalgaard, 2008, Heumann et al., 2016, de entre uma vastíssima lista).

Motivação

Temos consciência que muitos dos nossos alunos, ao ingressar no ensino superior, apresentam lacunas em termos de conhecimento de linguagens de programação, verificando-se também que muitos alunos nunca tiveram experiências de programação nem mesmo contacto com o software R. Propor a alunos do primeiro ciclo de ensino superior a aquisição de conhecimentos de Estatística em simultâneo com a aprendizagem de uma nova linguagem de programação poderia revelar-se, no nosso entendimento, uma tarefa desencadeadora de stress, remetendo para segundo plano o objetivo principal da aprendizagem.

Numa unidade curricular de Estatística, do segundo ciclo de um curso de engenharia em funcionamento no Instituto Superior de Engenharia de Coimbra do Instituto Politécnico de Coimbra, foi proposto aos alunos a possibilidade de a avaliação ser efetuada com recurso a projetos de trabalho desenvolvidos em ambiente R. Este curso em particular, é disponibilizado num horário de funcionamento em regime pós-laboral, pelo que alguns dos alunos, tendo já ingressado no mercado de trabalho, nem sempre apresentam disponibilidade para comparecer presencialmente às aulas.

A proposta apresentada contemplava duas possibilidades de avaliação: (i) de acordo com o método tradicionalmente usado, a avaliação consistia na realização de um exame final de resolução de exercícios, cotado para 20 valores e com duração limitada, ou (ii) resolução de quatro atividades de análise estatística de dados ao longo do semestre, desenvolvidas em ambiente R, versando os diversos conceitos estatísticos apresentados no decorrer do semestre.

A responsabilidade por esta unidade curricular tem estado atribuída, nos últimos 5 anos letivos, ao mesmo docente. Neste período temporal, o número de alunos inscritos na unidade curricular, bem como o número de alunos avaliados em cada ano, estão apresentados na Tabela 1. Com exceção dos anos letivos 2015/16, o segundo ano de funcionamento do curso, e 2018/19, tem-se observado que o número de alunos inscritos na unidade curricular se tem mantido uniforme e correspondente ao número de vagas abertas para o curso.

Tabela 1. Evolução do número de alunos inscritos e alunos avaliados no período 2015/16 a 2019/20

Núm. Alunos	2015/16	2016/17	2017/18	2018/19	2019/20
Inscritos	25	33	34	26	34
Avaliados	25	23	34	23	28

Em relação ao número de alunos avaliados, a flutuação relativamente ao número de alunos inscritos pode ser justificada pela própria natureza do curso: sendo um curso de segundo ciclo, alguns dos alunos entretanto ingressam no mercado de trabalho e tomam a opção de não se submetrem a avaliação a todas as unidades curriculares. Esta relação mostrou-se mais evidente no último ano letivo, em que os 6 alunos não avaliados não chegaram a frequentar qualquer aula no decorrer do semestre.

Resultados e Discussão

O método de avaliação descrito na secção anterior foi proposto a partir do ano letivo 2017/18. Até então, embora os conceitos de análise estatística de dados apresentados tivessem sido ilustrados com a resolução de problemas recorrendo ao software R, esta atividade não era parte integrante do processo de avaliação.

Na descrição dos objetivos e competências a adquirir apresentados na Ficha de Unidade Curricular, é mencionado

> *Objetivos:*
>
> *Pretende-se que o aluno adquira as bases necessárias para participar em estudos de mercado e realizar análises de dados, recorrendo a ferramentas computacionais utilizando o software/linguagem de programação R.*
>
> *Competências:*
>
> *Aquisição da linguagem essencial associada à análise de dados e estudos de mercado que permita aos estudantes desenvolver de forma autónoma os seus futuros projetos profissionais, bem como a capacidade de integrar equipas multidisciplinares envolvendo especialistas e clientes. Saber escrever código básico usando a linguagem R e interpretar os resultados obtidos.*

Assim, sendo parte dos objetivos, bem como das competências, a capacidade de programar em R para realização de análise estatística de dados, esta componente passou a ser parte integrante tanto do processo de ensino/aprendizagem, como do processo de avaliação.

Na Tabela 2 faz-se a comparação do número de alunos que optaram pelo regime de avaliação apenas por realização de trabalhos com o número de aprovados.

Tabela 2. Evolução do número de alunos avaliados e do número de alunos aprovados no período 2017/18 a 2019/20

Núm. Alunos	*2017/18*	*2018/19*	*2019/20*
Avaliados	33	23	28
Aprovados	33	23	28

Da comparação das Tabelas 1 e 2, verifica-se que apenas no ano letivo 2017/18 houve um aluno que não foi avaliado por este novo método de avaliação. Esta relação pode evidenciar o reconhecimento dado pelos alunos à possibilidade de, tendo disponível um período de tempo mais alargado para resposta, procederem com mais detalhe às análises estatísticas de dados que lhes são propostas, procurando realçar nos relatórios elaborados a aplicação dos conceitos teóricos que lhe são apresentados.

É ainda de salientar a taxa de aprovação de 100% entre os alunos que optaram por este regime de avaliação, o que não se verificou nos anos anteriores à utilização desta forma de avaliação.

Comentários Finais

A proposta de processo de avaliação aqui relatada sugere representar, por parte dos alunos, uma mais-valia no que respeita ao raciocínio e à literacia estatística.

A existência de ambientes de programação dedicados a análise estatística de dados, apresenta desafios à reestruturação de processos de ensino/aprendizagem e de avaliação, bem como encoraja os alunos a desenvolver projetos para aplicação de conceitos teóricos a situações concretas a que, no futuro profissional, serão chamados a dar resposta.

A própria natureza de uma unidade curricular de Estatística requer que os alunos aprendam por intermédio do desenvolvimento das suas próprias atividades, encorajados e guiados pelo professor no decorrer do seu estudo, enquanto que o desenvolvimento tecnológico influencia o que é ensinado e como é ensinado (Moore, 1997).

A implementação deste processo de ensino/aprendizagem e de avaliação promove o recurso a software livre, em particular ao R, na prática pedagógica, procurando ainda promover a literacia estatística entre alunos.

Referências

Boggino, N. (2009). A *avaliação como estratégia de ensino. Avaliar processos e resultados. Sísifo*/Revista de Ciências da Educação, 09, pp 79-86. Disponível em http://sisifo.fpce.ul.pt

Dalgaard, P. (2008). *Introductory Statistics* with R. Springer-Verlag, New York

Gomes, D. & de Sousa, B. (2018). *Teaching with R - A curse or a blessing*. In Sorto, M., White, A.Guyot, L. (Eds.) Proceedings of ICOTS10, Japan.

Heumann, C., Schomaker, M. & Shalabh, S. (2016). *Introduction to Statistics and Data Analysis:* With Exercises, Solutions and Applications in R. Springer, Switzerland, 1st ed.

Kaufman, S. (2005). *Tecnologia da informação em uma instituição de ensino superior: fatores que influenciam sua utilização.* (Tese de Mestrado) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.

Mendonça, A. (2012). *Instrumentos de Avaliação no Contexto do Ensino e Aprendizagem da Matemática.* (Tese de Mestrado). Universidade da Madeira, Portugal.

Moore, D. (1997). *New pedagogy and new content: the case of statistics.* International Statistical Review, 65(2), 123-165.

Nikiforidou, Z., Lekka, A. & Pange, J. (2010). *Statistical literacy at* *university level: the current trends.* Procedia Social and Behavioral Sciences, 9, 795-799.

Pimenta, R. (2006). A*ssessing statistical reasoning through project work.* In Rossman, B. Chance (Eds) Proceedings of ICOTS7, Brazil.

Prado, C., Vaz, D. & Almeida, D. (2011). Teoria da aprendizagem significativa: elaboração e avaliação de aula virtual na plataforma Moodle. Revista Brasileira de Enfermagem, 64(6), 114-1121.

R Core Team (2020). *R: A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Stemock, B. & Kerns, L. (2019). *Use of Commercial and Free Software for Teaching Statistics.* Statistics Education Research Journal, 18(2), 54-67.

Taylor, C. (2018). *Using R to teach statistics.* In Sorto, M., White, A.Guyot, L. (Eds.) Proceedings of ICOTS10, Japan.

Capítulo 7

José Alberto Rodrigues, Maria Amélia Loja e Joaquim Infante Barbosa

Calculus in Engineering: a Finite Element Method approach

The finite element method (FEM), the main tool of computer-aided engineering (CAE), it is one of the most powerful general-purpose techniques used in the computation of accurate solutions to partial differential equations. Despite the mathematical background necessary to the implementation of this method, the results can be explored to exemplify some Vector Calculus properties.

Thus, the focus of the present work is not on the implementation of FEM from the mathematical or technical perspective, not even we regard the accuracy of the solutions obtained.

Our goal is focused on the explanation of a set of illustrative mathematical models and on exploring their numerical solution.

Since partial differential equations (PDEs) form the basis for many mathematical models in physical sciences and, increasingly, in other fields as well, it would be difficult to overstate the importance of FEM.

From both, teaching and learning perspectives, this approach is considered to be an important issue, especially if we think at engineering courses' requirements, where the need for modeling abstraction is crucial. This reasoning is currently applied in some subjects of different cycles of studies and on specific topics associated to MSc dissertations.

From the literature review carried out it is possible to understand that FEM is widely used in the higher education system, in diverse scientific areas, namely in Engineering courses. As expected, the published works on this subject possess a highly application-oriented purpose as one can conclude from the works due to Karadelis (1998), Steif and Gallagher (2004), Zhuge and Mills (2009), Boulé (2014), Ma and Yaw (2015), Baquero (2015), among others.

In the work presented by Karadelis (1998), he examines the benefits of introducing FEM in the curriculum of undergraduate courses, taking into consideration its main objectives. In his work one discusses the efficiency of teaching and learning techniques for the development of skills needed in solving engineering problems. A particular emphasis is given to the development of a finite element model, simulating a component and its support system, as well as to the results and conclusions discussion. Steif and Gallagher (2004) describes a simple web-based finite element program, which aims at two main goals: first it intends to acquaint students with the basic steps of FEM and next to facilitate an increased understanding of some of the variables of importance when analyzing the elastic deformation in mechanics of materials field.

In another approach, Zhuge and Mills (2009) later considered a project-based learning (PBL) where the students were required to apply the knowledge of FEM to analyze and solve a structural problem using commercial software. The teaching method was centered on the development of the student's ability to select a suitable element for a given problem, and the ability to interpret the results and its accuracy. In the paper, the authors describe both the project design and learning outcomes.

More recently, Boulé (2014) presented a study on the use of FEM software to improve the learning in the electromagnetics area, as often electric and magnetic fields are seen as abstract constructs difficult to grasp for some students. Some case studies are reported to illustrate the main benefits offered by these numerical tools, namely the visualization of abstract notions such as vector fields, the treatment of cases that have no analytical solution, and the exploration of the influence that the variations to design parameters may bring to the problem to solve as a whole. Ma and Yaw (2015) present a proposal of integration of FEM into fundamental engineering classes to assist the teaching of deformation concepts in mechanics of materials. To this purpose, home-developed codes and commercial codes are used, depending on the problem complexity. The deformation mechanics is depicted through graphical illustrations from both the FEM approaches used and by photoelasticity method.

Baquero (2015) considered the use of FEM in the context of nanotechnology training. To that purpose he implemented cantilevers and cantilevers arrays, as sensors in a set of applications. The FEM was used to assess the validity of basic models where cantilevers were used as mass sensors. The fundamental frequency of the cantilever was found for a set of cases where small mass elements Δm was added to the free extremity of the cantilever. With these frequencies he obtained next the mass increments, and validated the results with a computer aided design application able to carry finite element analyses.

In a more global perspective it is worth of reference the work published by Sracic (2016) and by Plevris and Markeset (2018). In the first case, the use of FEM in large engineering firms and industries with numerous analyst engineers with diversified professional experience and the problems that therefore may arise if a correct articulation is not fully respected was addressed by Sraric (2016). It is in this context that the author proposes a finite element analysis checklist that can be used as a desktop tool to provide an auditing procedure that each analyst has to follow. This guarantee as well, to both supervisors and customers that the models are created and solved correctly and the results are reliable.

In the other hand, Plevris and Markeset (2018) focused on the importance of sound and profound engineering education and knowledge about the theory behind FEM as pre-requisites to obtain correct and reliable analysis results for designing real-world structures. This is illustrated by highlighting common mistakes made by structural engineers while simulating complex structures and systems wherein less conscious mistakes and errors may lead to serious structural damage.

Although, as mentioned, in this work, we are not interested in solving a specific case study, but instead via considering a set of comprehensive problems governed by PDEs, to discuss the corresponding models; it is relevant to understand the wide framework where one may encounter FEM applications. Because of this and in order to establish this relation to different scientific areas, one considers different types of engineering problems. In any of these cases it is assumed that the corresponding models are in a steady state, as they describe a stable equilibrium situation in various systems.

From the results that will be presented, it will be possible to understand why this approach may be an interesting way to re-think and complement the perspective usually considered in the transmission of mathematical concepts.

The use of a freeware finite element method computational package, FreeFEM++ (Hecht, 2012) may also be an important tool to complement and stimulate the usage of FEM in behavioral phenomena of diverse type of real systems.

To this purpose the manuscript is structured in such a way that after the introduction section it is followed by a Case Studies section where it starts with Laplace operator using some of its relationships and associated problems. Next, one focuses the gradient vector field and its properties, followed by a study on a curl field, both with a scalar and a vector field. The final case study is related to an elastostatic problem, which aims illustrating numerical and theoretical solutions comparison.

Finally, the Conclusions section closes the manuscript, highlighting the aspects that are considered as more relevant.

Case Studies

In this section, one presents a set of case studies concerning to different types of problems. The values used for the involved parameters, are considered to be expressed in the international system of unities although there is no intention to resemble a specific real case. Therefore, those values are just for the illustration purposes

Laplace's equation

Laplace's equation is written as the partial differential equation (PDE) represented by the following equation:

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

where the Laplace operator (or the Laplacian), Δ, in two dimensions for illustrative purposes, is defined by:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

The solutions of Laplace's equation are called as harmonic functions. The inhomogeneous version of Laplace's given by:

$$-\Delta u = f \tag{3}$$

where f is a function defined on Ω, being thus known as Poisson's equation.

Equations (1) and (3) are commonly posed on a bounded domain Ω in IR^2. A domain is a connected open set. For the sake of clearness, it matters to denote the meaning of some terms. Accordingly, "connected" means that the set consists of only one "piece", or more precisely, that any two points in the set are joined by a curve lying entirely within the set. "Open" means that the boundary of the set is not a part of the set and "bounded" means that the set is finite in extent, that is, that it can be enclosed by a circle with a finite radius. The boundary of Ω will be denoted by $\partial\Omega$, and the closure Ω of Ω is the union of Ω and $\partial\Omega$. The PDEs (1) and (3), by themselves, are insufficient to determine a unique solution, as (1) and (3) have many solutions. A particular solution can be singled out by adding boundary conditions; as it will be possible to see, such conditions are natural in many physical problems. For example, if f is a function defined on Ω and g is a function defined on $\partial\Omega$, then:

$$\begin{cases} -\Delta \mathrm{u} = \mathrm{f} & (4) \\ \mathrm{u} = g & (5) \end{cases}$$

it is called a Dirichlet boundary value problem (BVP), and (5) is referred to as a Dirichlet boundary condition. A Neumann BVP has the form:

$$-\Delta \mathrm{u} = \mathrm{f} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathbf{n}} = \mathrm{h} \tag{7}$$

where $\partial u/\partial \mathbf{n}$ is the normal derivative of u on $\partial\Omega$. If the vector n=n(x,y) is the outward- -pointing normal vector to $\partial\Omega$ at (x,y)€$\partial\Omega$ and ∇ u is the gradient vector of u,

$$\nabla \mathrm{u} = \left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}\right) \tag{8}$$

then, the normal derivative is defined by

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \nabla \mathrm{u} \cdot \mathbf{n} \tag{9}$$

A Dirichlet BVP for Laplace's or Poisson's equation has a unique solution, as long as the functions f and g are mathematically adequate. The situation with the Neumann problem is more subtle, and the existence and uniqueness questions are interrelated: If the functions f and h are compatible, then the Neumann BVP has infinitely many solutions, and any two of which differ by a constant. We refer Johnson

(1987) for the questions of existence and uniqueness of solution for the problems (4)-(5) and (6)-(7).

Physical experiments modeled by Laplace's equation

Steady-state heat flow

Our first model, an application of Laplace's equation, is about the heat flow over a flat metal plate occupying a domain Ω in IR^2. The function u=u(x,y) represents the temperature at the point $(x,y)\in\Omega$. The plate is assumed to be insulated on the top and bottom, so heat can flow only in the two in-plane dimensions. Such plate has a third dimension, its thickness, but we will assume that neither the plate nor its temperature varies in the transverse (vertical) direction, so that a two-dimensional model suffices.

According to these assumptions, Laplace's equation, models the case of steady-state heat flow: the temperature is independent of time and the temperature gradient ∇u indicates the flow of heat energy across the plate, as:

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \tag{10}$$

and Poisson's equation, models steady-state heat flow with heat sources and/or sinks in the plate.

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \tag{11}$$

If f(x,y)>0 for some $(x,y)\in\Omega$, then heat energy is being added at that point at a rate f(x,y) (in appropriate units), as shown at Figure 1 where we define f by (22). If f(x,y)<0, then energy is being removed at (x,y).

In this context, Dirichlet boundary conditions,

$$u = g \text{ on } \partial\Omega \tag{12}$$

indicates that the temperature of the plate is held fixed at the boundary, specifically, that the temperature at $(x,y)\in\partial\Omega$ is held fixed at g(x,y). The Dirichlet BVP (11)-(12), models the following situation: the plate is insulated on the top and bottom, the temperature at each point (x,y) in the boundary is held fixed at the given value of g(x,y), and the plate is allowed to reach equilibrium. The equilibrium temperature distribution is then given by the solution u of the BVP.

Considering Neumann boundary conditions,

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathbf{n}} = h \text{ on } \partial\Omega \tag{13}$$

they indicate that the heat flux across the boundary is the prescribed value h. The heat flux is the flow of heat energy, in units of energy per time and per length. In particular, the homogeneous Neumann condition, models the case of no heat flux, meaning the boundary is insulated.

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ on } \partial\Omega \tag{14}$$

The equations above are non-dimensional versions of the PDEs, as describing actual materials require physical parameters. In the heat flow problem described, the relevant parameter is the thermal conductivity, which is the proportionality constant associated to Fourier's law of heat conduction. This law postulates the heat flux is proportional to the temperature gradient, as follows:

$$\text{HEAT FLUX} = -\mathrm{k}\nabla \mathrm{u} \tag{15}$$

The units of k are energy per time, per length and per temperature. For example, the thermal conductivity of iron near 0 degrees Celsius is k=0.836 W/ (cm K). Poisson's equation is then written as

$$-\mathrm{k}\Delta \mathrm{u} = \mathrm{f} \text{ in } \Omega \tag{16}$$

From this equation, the units of f can be determined. They must be the same as the units of the left-hand side, which are energy per time and per volume (for example W/cm^3). The thermal conductivity k is positive by definition. If the material is heterogeneous, then the thermal conductivity varies throughout Ω: k=k(x,y). The PDE then becomes more complicated:

$$-\nabla \cdot (\mathrm{k}\nabla \mathrm{u}) = \mathrm{f} \text{ in } \Omega \tag{17}$$

The divergence operator, denoted by $\nabla\cdot$, is a partial differential operator that takes a vector- -valued function and produces a scalar-valued function as follows. Thus if,

$$F(x,y) = \left(f_1(x,y), f_2(x,y)\right) \tag{18}$$

we get

$$\nabla\cdot\ F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \tag{19}$$

So the divergence of the gradient is the Laplacian:

$$\nabla\cdot\nabla u = \Delta u \tag{20}$$

Laplacian operator is kind of measure of how much of a minimum point is the point (x,y), it will be positive when evaluated at a point in the neighborhood of a minimum point of function u, but it will negative when evaluated at a neighborhood of a maximum point of u.

Therefore, when k is constant, we obtain

$$-\nabla\cdot(k\nabla u) = -k\Delta u \tag{21}$$

A steady-state heat flow problem

Let's consider that $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ and a Dirichlet BVP (11)-(12), with a punctual source of energy f defined as:

$$f = f(x,y) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow \quad (x,y) = (0.5\ ,0.5\ ) \\ 0 & \Leftarrow \quad (x,y) \neq (0.5\ ,0.5\ ) \end{cases} \tag{22}$$

and g(x,y)=0, for all $(x,y)\in\partial\Omega$. As we have refereed, this means that the plate as a middle energy source and the function temperature u=u(x,y) vanish at the boundary of the plate $[0,1]\times[0,1]$. Here, we use a thermal conductivity k=1 at Script 1 (Annex).

To obtain relevant information about a function, we can draw a graphic, but in general, this is not easy without graphical tool software. Because of this, frequently we draw level lines. In Figure

1 one presents the tridimensional graphics of Dirichlet problems solution with some contour lines and in Figure 2 we can see the correspondent level lines.

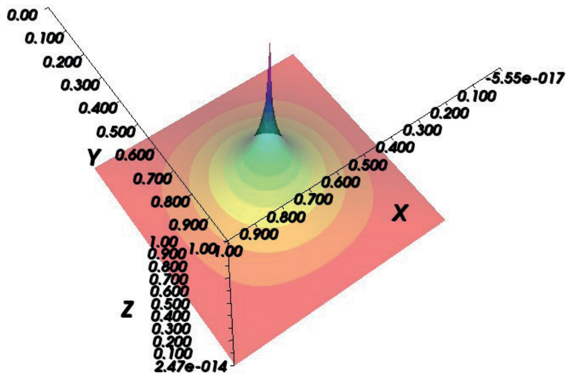
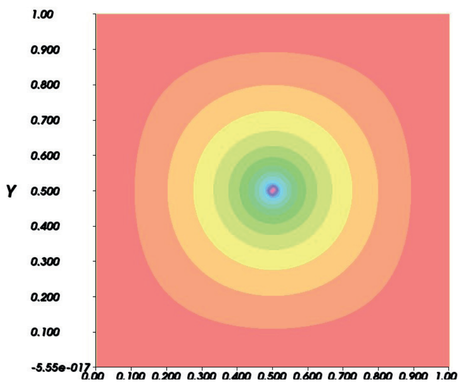


Figure 1. Contour lines of u



X

Figure 2. Level lines of u

Another important information about a function is its gradient (8). From the different properties of the gradient, we may refer three:

i. the gradient vector always points to an higher value point, as shown in Figure 3;

ii. the vector is orthogonal to the level lines, as depicted in Figure 4 and Figure 5;

iii. the flux has the opposite sense of the gradient vector (15). In fact the heat transfer takes place from the hotter areas to colder areas.

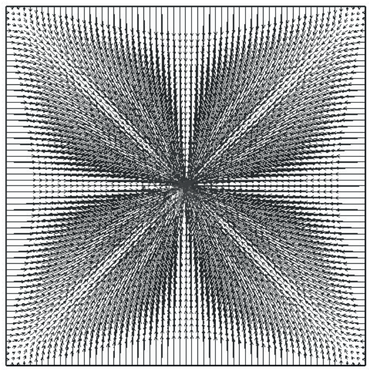


Figure 3. Gradient field of u

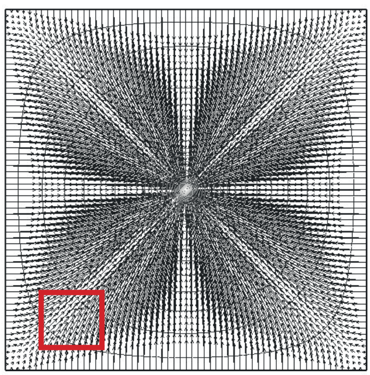


Figure 4. Vector gradient is orthogonal to level lines

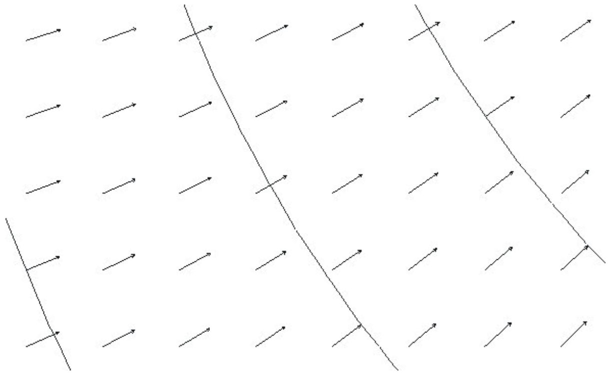


Figure 5. Zoom of vector gradient and level lines.
Region [0.2,0.3]×[0.1,0.2] red one in Figure 4

A divergence problem

Using the data from the problem of the previous section, equation (17) allows us to interpret the steady-state heat flow problem (11)-(12) like a divergence problem:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = f \text{ in } \Omega \tag{23}$$

with $\boldsymbol{F}$=-∇u, being the heat flux. The divergence operator measures outward flux of a vector field from an infinitesimal region around a given point. Following (22), we expect that the vector fields expands at the point (0.5 ,0.5), where

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(0.5\,,0.5\,) = \nabla \cdot (-\nabla \mathrm{u})(0.5\,,0.5\,) = -\Delta \mathrm{u}(0.5\,,0.5\,) = 1 \tag{24}$$

Since $\boldsymbol{F}$ is the heat flux field, it is easy to conclude from the existence of an energy source at this point, as we can see in Figure 6.

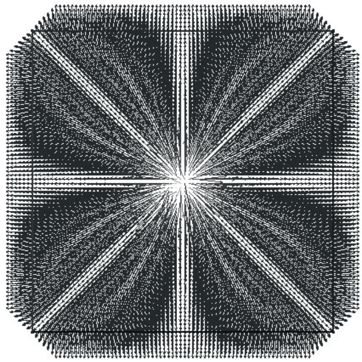


Figure 6. The heat flux field

We note that in Figure 6 we have $-\nabla u$, the opposite of the shown at Figure 3.

One of the most important theorems in vector analysis is known as the Divergence Theorem (Rodrigues, 2008), which is also sometimes called Gauss's Theorem. This is essentially an application of the fundamental theorem of calculus,

$$\int_a^b \frac{d\varphi}{dx} dx = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (25)$$

This enables us to express the integral of the quantity $d\varphi/dx$ along an interval in terms of the values of φ itself at the endpoints of that interval.

Having V as a limited region of IR^3, S its boundary and G ($G{:}IR^3 \rightarrow IR^3$) a vectorial function with continuous derivative in V, we can express the Divergence Theorem in its familiar form:

$$\iiint_V \nabla \cdot G \ dV = \iint_S G \cdot \mathbf{n}_e dS \qquad (26)$$

where n_e is the outward pointing unit normal field of the boundary S. The Divergence Theorem says:

$$\text{SOURCE RATE FOR V} = \text{FLUX ACROSS S} \qquad (27)$$

which means that the net flow outward across S is the same as the

rate at which fluid is being produced inside S.
Let's now read Divergence Theorem in the context of the plate Ω assumed to be insulated on the top and bottom and Dirichlet BVP (11)-(12) with (22), supposing the temperature vanishes on $\partial\Omega$. As we saw, heat can flow only in the two in-plane dimensions.
The boundary of Ω can be decomposed, as shown in Figure 7, like $\partial\Omega=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$. We remark that here triple integral is replaced by double integral and in place of surface integral we use line integral evaluated on the counter-clockwise.

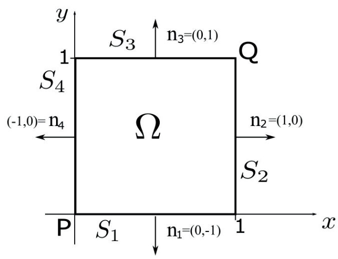


Figure 7. Outline of region Ω and its outward pointing unit normal field

The Divergence Theorem (26) in the plane region Ω reads:

$$\iint_{\Omega} \nabla\cdot \boldsymbol{F}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}\, dr = \sum_{i=1}^{4}\int_{S_i} \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}_i\, dr_i \tag{28}$$

If $F=-\nabla u$, (u is a scalar field, here we still consider the solution of Dirichlet BVP (11)-(12) and (22)) identity (28) can be written as:

$$\iint_{\Omega} \Delta u\, d\Omega = \iint_{\Omega} \nabla\cdot(-\nabla u) d\Omega = -\sum_{i=1}^{4}\int_{S_i} \nabla u\cdot\mathbf{n}_i\, dr_i \tag{29}$$

Using numerical integration over Ω, we obtain the following results:

$$\begin{gathered}\iint_{\Omega} \nabla\cdot \boldsymbol{F} d\Omega = \iint_{\Omega} \nabla\cdot(-\nabla u) d\Omega = \iint_{\Omega} -\Delta u\, d\Omega = \iint_{\Omega} f\, d\Omega \approx 0 \\ \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}\, dr = \sum_{i=1}^{4}\int_{S_i} -\nabla u\cdot\mathbf{n}_i\, dr_i \approx 0\end{gathered} \tag{30}$$

We expect this value regarding first the definition (22) of function f and for the line integral, we recall u is solution of problem (4)-(5) with $g(x,y)=0$, for all $(x,y)\in\partial\Omega$. More, once F is a gradient field, also said conservative vector field, the right hand side of (28) corresponds to the work done by F along $\partial\Omega$. In particular the work done by F from the point P to the point Q is path independent and one can write:

$$\int_{S_1\cup S_2} \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dr} = -\int_{S_3\cup S_4} \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dr} \tag{31}$$

$$\int_{S_1} -\nabla u\cdot\mathbf{n}_1\,\mathrm{dr}_1 + \int_{S_2} -\nabla u\cdot\mathbf{n}_2\,\mathrm{dr}_2 = \int_{S_3} \nabla u\cdot\mathbf{n}_3\,\mathrm{dr}_3 + \int_{S_4} \nabla u\cdot\mathbf{n}_4\,\mathrm{dr}_4$$

Recall that the tracing out the curve $\partial\Omega=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$ is counter-clockwise, so we reach Q from P by $S_1\cup S_2$ or by $S_3\cup S_4$ using the opposite sense. Finally, the result from (30) is also a consequence of the line $\partial\Omega$ being closed and of $\boldsymbol{F}$ being a gradient field.

Measuring areas

For this section we selected a vector field $\boldsymbol{F}$ defined by $\mathbf{F}(x,y)=(f_2(x,y),-f_1(x,y))$ with a two variables scalar field f_1 and f_2. Our goal in this section is the establishment of Green's Theorem from (28):

$$\iint_{\Omega} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\Omega = \iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\,\mathrm{d}\Omega \tag{32}$$

and

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dr} = \int_{\partial\Omega} (f_2,-f_1)\cdot\left(\frac{dy}{dr},-\frac{dx}{dr}\right)\mathrm{dr} = \int_{\partial\Omega} f_1dx + f_2dy \tag{33}$$

where is evaluated as shown at Figure 8

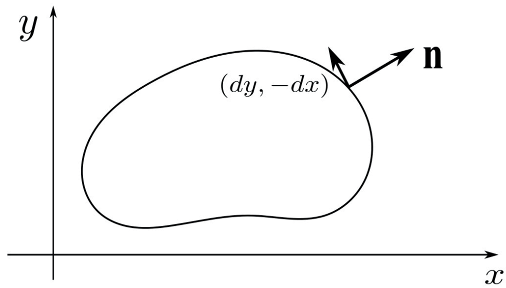


Figure 8. Planar outward-pointing normal vector to $\partial\Omega$

Consequently, we get the Green's theorem, where $\partial\Omega$ represents a closed curve encompassing region Ω

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} f_1 dx + f_2 dy = \int_{\partial\Omega} (f_1, f_2) \cdot \mathbf{n}\, dr \qquad (34)$$

For the vector field (P,Q)=(0,x) , by example, we obtain

$$\text{Area of } \Omega = \iint_{\Omega} 1\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} x dy = \int_{S_2} x\, dr_i + \int_{S_4} x\, dr_i = \qquad (35)$$

when $\Omega=[0,1]\times[0,1]$, like in Figure 7.

The curl operator

The curl operator, denoted by $\nabla\times$, is a partial differential operator that takes a vector-valued function and produces a scalar-valued function as follows: If,

$$F(x, y, z) = \big(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)\big) \qquad (36)$$

we get

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \qquad (37)$$

The time independent Maxwell's equations

The classical, time independent, macroscopic electromagnetic field is described by four vectorial functions of position $x \in IR^3$, denoted by E, D, H and B, as in (Monk, 2003). The fundamental vectors field E and H, are called the electric and magnetic field intensities, respectively (we shall refer to them as the electric field and the magnetic field, respectively). The vector functions D and B, which will later be eliminated from the description of the electromagnetic field via suitable constitutive relations, are called the electric displacement and magnetic induction, respectively.

An electromagnetic field is created by a distribution of sources consisting of static electric charges and the directed flow of electric charge, which is called current. The distribution of charges is given by a scalar charge density function ρ, while currents are described by the vector current density function J. Maxwell's equations then state that the field variables and sources are related by the following equations which apply throughout the region of space in IR^3, occupied by the electromagnetic field:

$$\nabla \times E = 0 \tag{38}$$

$$\nabla \cdot D = \rho \tag{39}$$

$$\nabla \times H = J \tag{40}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{41}$$

Equation (38) is called Faraday's law and it gives the effect of a changing magnetic field on the electric field. The divergence condition (39) is Gauss's law and it gives the effect of the charge density on the electric displacement. The equation, (40), denotes Ampere's circuital law as modified by Maxwell. Finally, equation (41) expresses the fact that the magnetic induction B is solenoidal. The divergence conditions (39) and (41) are consequences of the fundamental field equations, (38) and (39), provided charge is conserved.

Formally, equation (38) immediately allows us to write:

$$E = -\nabla \varphi \tag{42}$$

since the curl of a gradient is automatically zero. In fact, whenever we come across an irrotational vector field in physics we can always write it as the gradient of some scalar field. This is clearly a useful thing to do, since it enables us to replace a vector field by a much simpler scalar field. The quantity φ in the above equation is known as the electric scalar potential.

For isotropic materials, we can establish the following constitutive relations:

$$B = \mu H \tag{43}$$

$$D = \varepsilon E \tag{44}$$

$$J = \sigma E \tag{45}$$

where μ is the magnetic permeability, ε is the electric permittivity of vacuum and σ is the electric conductivity of a specific medium. From (39) and (42), one has:

$$-\Delta\varphi = \rho \tag{46}$$

and consequently E, D and J. Biot-Savart law (Griffiths, 2014), defines how a current density J at position x within volume $V \subset IR^3$ contributes to H at position y and comes out this study.

A steady-state electric problem

Let's consider the region V=[0,1]×[0,1]×[0,1] where we define φ by equation (46), with ρ=0.This means that no charge is in V, and the boundary conditions:

$$\varphi = 0 \ \text{ on } \Gamma_D \tag{47}$$

and

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = h \ \text{ on } \Gamma_{N_1} \tag{48}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \text{on } \Gamma_{N_2} \tag{49}$$

with h=2. The Dirichlet condition (42) means the electric field (37) is parallel to vector n=n(x,y,z), the outward-pointing normal vector to Γ_D. For the Neumann condition we have two cases: condition (43) means an electric current across the boundary Γ_{N1} with an intensity h; condition (44) denotes the electric field (37) that is parallel to faces Γ_{N2}. We take the simpler case, where $\varepsilon = \sigma = 1$.
In Figure 9 we can observe an outline of the region V and its boundaries classification. For a better representation of the numerical solution φ of problem (41)-(44), one will use as cut plane z=0.5, as shown in Figure 10.

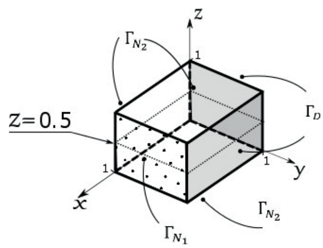


Figure 9. Outline of region V.Γ_D is the shaded lateral faces,Γ_{N1} is the dots face and Γ_{N2} is the remainder ones.

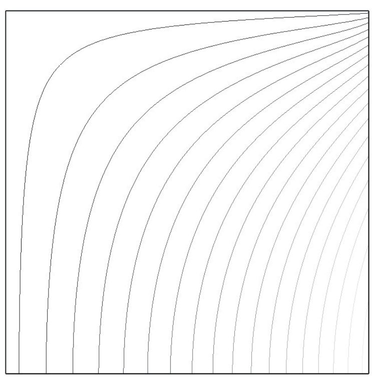
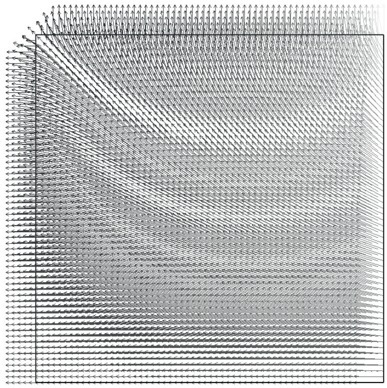


Figure 10. The isolines of electric scalar potential the φ at the cut plane z=0.5.

Figure 11, depicts the expected behavior for electric field E and the aspect of an irrotactional field. From the mathematical point of the view, and with the choosen constants, the fields E, D and J are the same.



Figuer 11. The electric field $E=-\nabla\varphi$ at the cut plane z=0.5.

Elastostatics

Elastostatics, is a very broad engineering subject once almost all human constructions and natural structures depend on Elasticity for stability and ability to withstand external loads. Basic elastostatics concerns deformations in bodies which possess predominantly regular and simple shapes, when subjected to simple combinations of external generalized forces.

Frequently, these bodies are assumed to be made from an isotropic and homogeneous linear elastic material, but even with all these assumptions it still takes some work to find the analytic solutions when it can be done at all. One of the simplest cases is the one dimensional case, which can denote the case of a bar made of linearly elastic material, represented by Ω, subjected to a static load. In such circumstances, the load is assumed to be applied slowly enough so that the accelerations are zero, or assuming that it was applied sufficiently long ago that any vibrations have vanished and movement has ceased.

Let's represent by $u=u(x)$ the displacement in the longitudinal direction, of a particle that occupies originally the position x on the bar. The equations governing the static response of the bar when submitted to a longitudinal force, are:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{dx}} + b_x = 0 \ \text{ in } \ \Omega \tag{50}$$

this static equilibrium equation must be satisfied throughout the body. Additionally, the kinematical relations from Elasticity for small deformations must hold, since one is assuming a linear case:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dx}} \ \text{ in } \ \Omega \tag{51}$$

And finally the relation between the strains and stresses, expressed via the constitutive law (for example, Hooke's law) must also be considered taking into account the nature of the material of the bar:

$$\sigma = E\boldsymbol{\varepsilon} \ \text{ in } \Omega \tag{52}$$

where E is the Young's modulus and b_x is a body force (per unit of volume) along x direction. The unknowns of the problem are the stress σ, strain ε and displacement u. Equations (50)-(52) can then be combined, yielding a second order differential equation in u, called Navier's equation.

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{dx}^2} + \frac{b_x}{E} = 0 \ \text{ in } \ \Omega \tag{53}$$

The deformation kinematics and the strains distribution must be consistent with the preservation of body continuity, although this compatibility subject is not addressed in the context of introductory mechanics of materials.

With illustrating purposes, one considers now a particular problem of a bar as shown in Figure 12. The bar is characterized by having a length L, and a prismatic cross-sectional area A. The left end of the bar is fixed so that it is completely constrained at that point, namely in the x direction, which is the relevant dimension of the problem. A force F is applied at the free end of the bar, the right extremity.

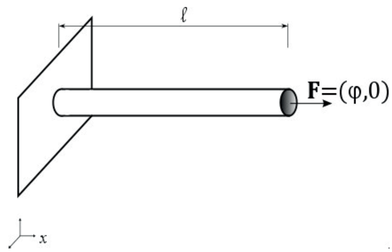


Figure 12. The bar outline.

This problem is then modelled considering the equations (50)-(52) assuming null body forces (b_x=0) and the boundary conditions u(0)=0 and $\sigma(\ell)= \varphi/A$. By integration we can obtain the analytical solution

$$u(x) = \left(\frac{\varphi}{EA}\right)x \tag{54}$$

Using the analytical solution for the values, E=10^5, φ=10^2 and ℓ=1; A=1, we obtain u(1)=0,001.
If we use instead Script 2 (Annex) we get u(1)=0,000959≈0,001, quite near the analytical solution. We remark that with Finite Element Method approximation we must replace equation (53) by the so called variational identity using integration by parts:

$$\int_0^L \frac{d^2u}{dx^2} v\, dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx = u'(\ell)v(\ell) = \frac{\varphi}{EA}v(\ell) \tag{55}$$

where v is a test function of the finite element space with the Dirichlet boundary condition u(0)=0. Usually small deformations must be affected by a magnification coefficient, as shown at Figure 13, to be easily detectable.

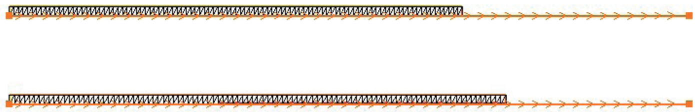


Figure 13. The bar deformation simulation by FEM.

Conclusions

The aim of this work is to present an alternative, complementary methodology of transmitting concepts associated to Vector Calculus properties and differential operators. This methodology takes into account the context of an Engineering School, and more precisely the education requirements that may be associated to the first and second cycles of Civil, Electrical and Mechanical Engineering courses, among others. Therefore, the case studies here illustrated are related to scientific areas that are intimately related to these courses.

With the examples presented, the steady-state heat flow problem and the steady-state electric problem, we are able to illustrate the importance of Laplace's problem when we handle mathematical models. We also introduce the concept of approximate solution and its relation to the exact solution, not always possible to determine.

The solution of Laplace's problem allows us to denote some of the most important Vector Calculus results in the context of a real physical problem, facilitating the understanding of the subjects relationship normally presented as unrelated, and evidence the Mathematical and Physical importance of Laplace's problem, despite its simplicity.

As mentioned, the main goal of the present work is neither the Finite Element Method implementation nor the modelling difficulties by themselves, but the solution properties exploration. From the different case studies analyzed, it is possible to conclude that this approach may constitute a methodological tool for the students to achieve an improved, mutual understanding of diversified scientific areas perspectives.

It is also important to denote the use of a freeware finite element method computational package, FreeFEM++, which may constitute an effective tool for a wider dissemination of this methodology, both at teaching and learning levels.

References

Baquero, H.A. (2015) *Using the Finite Elements Method (FEM) for Nanotechnology Education.* A rectangular cantilever as a mass sensor. Journal of Physics. 582(1). doi:10.1088/1742-6596/582/1/012042

Boulé, M. (2014) *The Role of Finite Element Method Software in the Teaching of Electromagnetics.* In Proceedings of Fourth Interdisciplinary Engineering Design Education Conference (pp. 44-51) Santa Clara, CA. doi: 10.1109/IEDEC.2014.6784679

Drábek, P., & Holubová, G. (2014). *Elements of Partial Differential Equations*. Berlin, Boston: De Gruyter. doi: https://doi.org/10.1515/9783110316674

Griffiths, D. (2014). *Introduction to Electrodynamics* (4th ed.). Boston, MA: Pearson.

Hecht, F. (2012). *New development in freefem++, Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4), 251-266. doi: https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013

Johnson, C. (1987). *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Karadelis, J. N. (1998). *A stimulating approach to teaching, learning and assessing finite element methods: a case study*. European Journal of Engineering Education, 23(1), 91-103. https://doi.org/10.1080/03043799808230110

Ma, Q., & Yaw, L. L. (2015, June), *Finite Element Method as a Useful Modern Engineering Tool to Enhance Learning of Deformation Concepts* Paper presented at 2015 ASEE Annual Conference & Exposition, Seattle, Washington. 10.18260/p.24113

Monk, P. (2003). *Finite Element Methods for Maxwell's Equations.* Oxford, UK: Oxford University Press.

Reddy, J. N. (2006) *Introduction to the Finite Element Method, Third Edition.* McGraw-Hill Education.

Rodrigues, J. A. (2008). *Curso de Análise Matemática Cálculo em IR^n.* Lisboa: Principia Editora.

Rodrigues, J. A., Loja, M. A. R. & Barbosa, J. I. (2016) *Using the finite element method to understand calculus.* 2016 2nd International Conference of the Portuguese Society for Engineering Education (pp. 1-7). (CISPEE), Vila Real. doi: 10.1109/CISPEE.2016.7777734

Plevris, V., & Markeset, G. (2018) *Educational Challenges in Computer-based Finite Element Analysis and Design of Structures.* Journal of Computer Science 14 (10), 1351-1362. doi: 10.3844/jcssp.2018.1351.1362

Sracic, M. W. (2016). *An Approach to Teaching the Finite Element Method That Uses Best Practice Techniques From Industry.* In Proceedings of the ASME 2016 International Mechanical Engineering Congress and Exposition: Vol. 5. Education and Globalization. Phoenix, Arizona, USA

doi: https://doi.org/10.1115/IMECE2016-65378

Steif, P., & Gallagher, E. (2004). *Transitioning students to finite element analysis and improving learning in basic courses.* 34th Annual Frontiers in Education, 2004. FIE 2004. Savannah, GA, 2004, (pp. S3B-1)

doi: 10.1109/FIE.2004.1408752

Zhuge, Y., & Mills, J. (2009). *Teaching finite element modelling at the undergraduate level: A PBL approach. AaeE 2009: 20th Annual Conference for the Australasian Association for Engineering Education,* Adelaide, Australia. Paper retrieved from https://eprints.usq.edu.au/6772/1/Zhuge_Mills_AaeE2009_AV.pdf

ANNEXES

Script 1

```
real[int] xdelta = [0.5];// coord x de delta_i
real[int] ydelta = [0.5];// coord x de delta_i
real[int] cdelta=[1.];// coef   delta_i

mesh Th=square(100,100);
fespace Vh(Th,P1);     // P1 FE space

real k=.2;
matrix D = interpolate(Vh,xdelta,ydelta); // the interpolation matrix
 // at point (xdelta[j],ydelta[i] )
 // so D_ij = wi((xdelta[j],ydelta[i])  where wi are the basic function of  Vh.


 Vh uh,vh,
 u,v;              // unkown and test function.
 func g=0;         //  boundary condition function

Vh b;
 b[]= D*cdelta;
 b[]= -b[];

 problem laplace(uh,vh,solver=GMRES,tgv=1e5) =   //  definion of  the problem
  int2d(Th)( (dx(uh)*dx(vh) + dy(uh)*dy(vh)) )        //  bilinear form
  + b[]                                                //  linear form
  + on(1,2,3,4,uh=g) ;                                 //  boundary condition form

  laplace;                                            // solve the problem

u=-dx(uh);
v=-dy(uh);

real s,r1,r2,r3,r4;

s=int2d(Th)(b);//dx(u)+dy(u));

r1=int1d(Th,1)(v);
r2=int1d(Th,2)(u);
r3=int1d(Th,3)(v);
r4=int1d(Th,4)(u);

cout<<"integral="<<s<<endl<<" "<<r1<<"  "<<r2
<<" "<<r3<<"  "<<r4<<endl<<r1+r2+r3+r4<<endl;

plot(uh);                                   // to see the result
plot([u,v],grey=1);                         // to see the gradient
plot(uh,nbiso=30, grey=1);
plot([u,v],uh,nbiso=30,grey=1);             // to see the level lines
plot([u,v],uh,dim=3,grey=1);

plot([u,v],uh,nbiso=50,bb=[[0.2,0.3],[0.1,0.2]],grey=1); // zoom
```

ANNEXES

Script 2

```
int np=100;
mesh Th = square(np,1,[x,y/50]);

border OX(t=0,1.5){x=t;y=0;} //OX axis reference

fespace Vh(Th,P1);

Vh u,v,uu,vv;
real sqrt2=sqrt(2.);
macro epsilon(u1,u2)  [dx(u1),dy(u2),(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] // EOM
 macro div(u,v) ( dx(u)+dy(v) ) // EOM

 plot(Th,cmm="Th ",OX(m),wait=1);

 real E = 1e+5, nu = 2.,
     mu= E/(2*(1+nu)),
     lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)), f = 1.e+2;

 solve elastic([u,v],[uu,vv])= int2d(Th)(
        lambda*div(u,v)*div(uu,vv)
        +2.*mu*( epsilon(u,v)'*epsilon(uu,vv) ) )
        - int1d(Th,2)(f*uu)
        + on(4,u=0,v=0);

 real coef=100;                  // magnification coefficient

 mesh th1 = movemesh(Th, [x+u*coef, y+v*coef]);

plot(th1, OX(m), wait=1);

real dxmin  = u(1,0);

cout << " dep.  max   x = "<< dxmin<< endl;
```

Capítulo 8

Susana Nieto and Higinio Ramos

The use of Computer Algebra Systems (CAS) in the teaching of Engineering Mathematics. An example: the Mathematica system

One of the key social aspects that characterize the 21st century is the profound change on the information and communication technologies (ICT), which includes "a diverse set of technological tools and resources used to communicate and to create, disseminate, store and manage information" (Toro & Joshi, 2012). Most institutions of higher education have not remained on the sidelines; the use of technology in supporting learning and teaching activities is a widely established response to technological innovations both in the labor field and in society itself (García-Peñalvo Colomo-Palacios, & Lytras, 2012). These technological innovations include the use of specific software (symbolic calculation programs, on-line calculators, graphical representation and simulation systems, etc.) but also the dissemination of new forms of teacher-student communication, the institutional development of virtual campuses, electronic administration, online courses, etc.

ICTs have a profound impact on learning, affecting to "what is learned, how it is learned, when and where learning takes place, who is learning and who is teaching" (Oliver, 2002). Concerning the mathematics, the vast majority of the subjects taught in the current university degree programs incorporate, more or less systematically, the use of some of the various symbolic calculation systems currently available. This situation is evident in the field of engineering, especially in computer engineering, industrial engineering, or other studies related to design, architecture, construction, or civil engineering. The training of students of these degrees in the use and/or in the development of technological tools is one of its motives (Duderstadt, 2010). Van der Wal, Bakker and Drijvers (2017) have analyzed the techno-mathematical literacies needed by future engineers, which include technical software skills and technical communication skills, so that incorporating useful tools within the teaching of these degrees is a way of preparing the professional performance of future graduates (Gravemeijer, Stephan, Julie, Lin, & Ohtani, 2017). In this context, the introduction of symbolic calculation systems, visualization tools, graphical representations, calculation of structures or mechanisms, computer-aided design, process simulations, data analysis, etc., is much more natural, and students are predisposed to the incorporation of these technological tools.

We will show in particular some of our experiences with Mathematica, a symbolic calculation program with which we have been working for more than 25 years in different degrees in Science and Engineering. We will also show some precautions that should be taken in order to make more effective the use of this kind of systems.

Symbolic calculation systems

The symbolic calculation programs have experienced an important development in the last 20 years, and right now the mathematics teachers have a wide range of tools available for their use in the classroom. On the one hand, there are commercial or proprietary programs; the most widely distributed nowadays are Mathematica (http://www.wolfram.com), Maple (http://www.maplesoft.com) and Matlab (http://www.mathworks.com/products/matlab.

html). There are also several symbolic calculation programs freely available, including Maxima (http://maxima.sourgeforge.net), Geogebra (http://www.geogebra.org) and Octave (http://www.octave.org). The latter is considered compatible with Matlab, while Maxima and Geogebra are more widespread in the pre-university levels. For simple calculations, you can access free on-line versions of some programs, as in the case of Mathematica (http://www.wolframalpha.com), which in the Wolfram Alpha repository allows on-line calculation of integrals, derivatives, limits, solving equations, graphical representation of functions, etc., without the need to have the program installed on a computer.

In this work, we will consider the Mathematica system as an example of the use of CAS in the teaching of mathematics in engineering. Its main drawback (the fact that it is a proprietary software with a high cost) is offset at some universities by the existence of a "campus license" that allows its use without limitations by the entire university community, including teachers and students of all degrees. Anyway, although some of the characteristics that we mention turn out to be specific for this system (for example, those related to graphical visualization), many of the reflections that we will make can be applied to other symbolic calculation programs, both proprietary and freely distributed.

The incorporation of symbolic calculation programs in mathematics classrooms has been occurring in a progressive but unstoppably way in recent years. As Lavicza (2007) indicates, the use of CAS by professors at the university level is not homogeneous, but is influenced by different factors; among them there are personal characteristics (such as age), external factors (generally institutional, for example the availability of licenses or computer rooms) and the conceptions of the mathematicians themselves about their subject and their work as teachers.

However, even taking into account all these factors and the great variability that they bring, the progressive introduction of CAS in the mathematics classroom at the university has been accelerated by factors as the easy access to computers, the dissemination of experiences and materials by means of Internet, the diffusion of academic licenses for proprietary programs, the growing experience accumulated by teachers, etc. In this context, the increasing use of CAS in mathematics teaching at the university has occurred in two main ways. On the one hand, CAS have been used by teachers as a tool for illustrating mathematical examples, for the graphical representation of functions of one or several variables, for simplifying the resolution of equations or systems, for accelerating the realization of extensive calculations such as determinants or inverses of large matrices, etc. On the other hand, there has been a widespread dissemination of regulated Practical Sessions (Lavizca, 2010), often driven by the great importance of the continuous assessment proposed in the Bologna Process. Following these pathways, the occasional use of CAS as a visual or computing aid has become a fundamental part of the work of teaching mathematics.

The *Mathematica* system

The *Mathematica* program or *Mathematica* system is a powerful software that integrates a large number of functionalities that include numerical and symbolic computation, a powerful programming language and an interactive tool for calculations and graphical representations. Its graphical capabilities (Trott, 2004), allow users to visualize and represent curves in the plane and in the space, surfaces given in different types of coordinates, simple two-dimensional and three-dimensional graphical images (Primitive Graphics), vector functions, simulations and dynamic manipulations, etc. Its creator, Stephen Wolfram, conceived it at the beginning of the Eighties as a program for the use of physicists and engineers (Wolfram, 1991), but it includes functionalities of other fields such as geography, chemistry, medicine, economy, etc., and of course mathematics.

In the latest versions of *Mathematica* its didactic aspect has been increasingly developed, so it presents a clear added value for teachers of science, mathematics and engineering subjects. Thus, its interface includes many facilities for its use, such as suggestions for syntax, an auto-completion function for commands, the use of “palettes” like an equation editor to facilitate transcription from mathematical text, on-line and off-line help with a multitude of applications and examples, manuals for learning mathematical concepts, step-by-step development of operations, color codes for writing with indication errors, highlights of the active code in each level, error messages on screen, etc.

Among the latest additions two of them are especially remarkable due their pedagogical value: on one hand, the possibility of writing in free format ("free form"), in which *Mathematica* itself interprets the requests that the user makes in natural language (in English), translating them into the language of *Mathematica* and providing an answer which can present different levels of complexity and depth at the request of the user. Another powerful tool is the introduction of interactive graphic representations by means of the Manipulate command (Mureşan, 2017), which allows the change of diverse parameters in real-time in order to modify graphic representations at the user's convenience.

Advantages (and some drawbacks) of the use of CAS in the mathematics classroom

We will review some of the main advantages, according to our experience, in the introduction of CAS in the teaching practice of mathematics subjects in general, and particularly in the case of teaching in engineering degrees.

The first and most obvious of the advantages has to do with the visualization and graphical representation of mathematical objects (Lavicza, 2010; Alpers et al, 2013). We agree with Arcavi (2003) when he states that "Visualization is no longer related to the illustrative purposes only, but is also being recognized as a key component of reasoning (deeply engaging with the conceptual and not the merely perceptual), problem solving, and even proving" (p.235). Thus, the reinforcement of visualization skills is one of the possible ways to improve the learning of mathematical concepts (Liang & Sedig, 2010). In general, trying to represent a mathematical concept favors its visualization, comprehension and memorization, and therefore teachers make extensive use of diagrams, graphs and visual representations of all kinds. In the international survey study made by Marshall et al., (2012), it is indicated that "practitioners used CAS primarily to have students visualize mathematical concepts and for students to explore and experiment with mathematical concepts" (p. 433). In this sense, we must highlight the great graphical capability offered by Mathematica for two-dimensional and three-dimensional representation of different mathematical objects (curves in the plane or in space, surfaces, graphs, trees, geometric elements in 2D or 3D, etc.). As commented above, a very interesting improvement of this visualization is the inclusion in the last versions of dynamic elements, in which the users can manipulate instantaneously different parameters associated with the graphical representations. Ferrara, Pratt, & Robutti (2006) in their bibliographical review tell us that "interactivity and dynamicity are two features for which technology promises a wide potential" (p. 267).

This aspect of visualization is especially relevant in the case of engineering education. The use of visual technology for the study of scientific topics produces a better understanding and increases the motivation of engineering students (Zimmermann & Cunningham, 1991). Visualization skills are also necessary, among others, for activities as the ones described by Hsi, Linn, & Bell, (1997):

> (…) designing and documenting parts to be assembled, imagining the shape of cut hillsides for highway construction, laying out circuit designs, or finding optimal crystal configurations (…) imagine objects in different orientations, translate two-dimensional drawings into three dimensions, or visualize hidden views of objects before they render them on paper or in Computer-Assisted Design (CAD) programs (p. 151).

Another aspect in which the help of the CAS is relevant is the resolution of systems of equations of all kinds. In the case of linear systems, this can be made by the simple handling of the associated matrix representation and by the ease of representation of possible solutions. For non-linear systems we can apply in a simple way several procedures, both symbolic (in the case of algebraic or transcendental equations where we can use the concept of inverse function) and numerical, with very high precision in a short time. In this case, the visualization tools can also help to determine a suitable point for the beginning of the algorithm or help to differentiate between very close solutions. In the case of differential equations, we can also apply different numerical methods and representation of families of solution curves. These resolution tools allow us to focus students' attention not on the problem solving methods, but on the understanding and interpretation of the solutions and their characteristics.

The usefulness of the CAS in the realization of long calculations but of simple comprehension is also very relevant. Gravemeijer et al. (2017) show that "basically all mathematical operations that are taught in primary, secondary, and tertiary education can be performed by computers and are performed by computers in the world outside school" (p. 107). This is the case of the calculations associated with the handling of large matrices: the calculation "by hand" of products, determinants and inverses of square matrices of order higher than 4 is a tedious task in which it is easy to make mistakes, but it results from an immediate solution by using a CAS. The same happens with the application of derivation techniques or the integration of functions of one or several variables; for example, doing complicated calculus using the integration techniques can easily be replaced by more substantive issues in the classroom, such as modeling or interpretation of results (Abichandani, Primerano & Kam, 2010; Berger, 2010). Another opportunity for using CAS involves the calculation of Taylor's polynomials (Varbanova, 2017) or interpolating polynomials. The recent study by Mohammad (2019) shows that students tend to use CAS when they perceive the mathematical task as time-consuming, regardless of their attitude towards CAS, while their attitude about CAS affects their use whenever they perceive the task as non-time-consuming.

An important aspect of the use of CAS, and, in general, of scientific software, refers to the change in the attitude of the students and in the teacher-student relationship. In traditional teaching, the teacher is the center of attention, while in the classrooms where students can program, manipulate, modify instructions or parameters, make different attempts to solve, etc., with the test facilities offered by a CAS, is the student who acquires greater autonomy in learning (SEFI, 2013). As Gjonbalaj and Gjoka (2018) indicate, “By exploring examples which work and examples which fail, it is possible for the students to gain the visual intuitions necessary to provide powerful formal insights”. The use of CAS acts as a good opportunity for students to “explore” different methods of solving the same problem, different values for a parameterization, or to integrate different approaches (through graphs, tables, functions, modeling, etc.), to prove and modify hypotheses, etc.

Even so, we have to take into account some potential drawbacks. Firstly, it must be taken into account that technology, well used, becomes a very useful tool to promote learning, but the mere fact of using some kind of technology for teaching purposes does not automatically entail better results than using traditional teaching (Hoyles & Noss, 2003; Kumar, 2008; Smetana & Bell, 2012, Velichova, 2015). Varbanova (2017) tells us: “However, the great power and potential of CAS cannot automatically transfer mathematics knowledge to learners and enhance their competency and appreciation of mathematics” (p.473). In this sense, the type of activities designed to be carried out with technological tools is of great importance (Heid & Blume, 2008), and a real didactic work is required prior to generating the activities to be carried out with CAS: Ferrara et al. (2006) tell us that “it requires efforts and time to be spent in the designing of suitable activities with technology and in instruction on the technology itself” (p. 246). In this regard, Varbanova (2017) also encourages not being slaves of technology and recommends the distinction between activities needing “less CAS” (simple tasks), “more CAS” (to challenge existing ideas or save time and effort), or “only CAS” (to expand existing ideas). Alpers et al (2013) also warns about the loss of basic mathematical capabilities, not only fluency when carrying out mathematical procedures, but also a reduced comprehension of core mathematical concepts.

On the other hand, the CAS can act as a kind of “black box” (Williams & Wake, 2007), in which the mathematical problems are solved in a semi-automatic way, without users performing a real work of understanding the situation. This can produce a disconnection between procedures and understanding or promoting a “trial/error” strategy without actual comprehension (Alpers et al, 2013). In general, in a CAS the results are shown, but the procedures used in the resolution are not shown and we do not have access to the steps or intermediate results that are present in the resolution by hand; this lack of detail can produce unconnected or incorrect learning (Velichova, 2015); and can limit the generalization of the application to similar or related problems. Berger (2010) warns us about this: "In terms of teaching, we cannot assume that students will be able to adequately interpret CAS output, even if they are able to generate the appropriate CAS commands and output" (p. 331). Some recent developments, such as Mathematica step-by-step solutions, can avoid this "black-box" effect, but it requires a careful design of the use of CAS at the classroom. Teachers should also encourage their students to "check" the responses given by the CAS at least roughly or by different approaches (analytical, numerical, graphical, or mixed) (Gravemeijer et al, 2017; Varbanova, 2017).

Also, according to Hoyles and Noss (2003) "it is important to distinguish the needs of mathematical learners from the needs of mathematical users – learners need to search for and appreciate generality and structure, while users want simply to get a particular job done or a problem solved" (p. 3). CAS are often tools that require specific learning (commands, options, syntax, etc.), so they can be perceived as rigid instruments that require a lot of prior effort to achieve appreciable results, or whose responses are difficult to interpret by users.

Other issues to take into account when using not only CAS but also ICT in the classroom are more general, but not least. Weiss and Tobin (2015) have analyzed some of these disadvantages of using CAS in examinations in order to understand why some Australian universities are avoiding the use of CAS for mathematical exams. These negative factors include the possibility of cheating, wasting time in mastering technology instead of learning mathematical contents, and the limitations of the kind of knowledge that can be evaluated if CAS are allowed at examinations. Furthermore, the ability of students must be trained, not only to handle ICT (what Berger (2010) calls "computer literate students"), but also their ability to handle digital information. For this, it is necessary to select the relevant information and confirm its validity and availability. It is also necessary to avoid the dangers associated with the possibility of plagiarism, the impersonation in on-line tests, the correct authentication of users, the dissemination of false or untested information, the protection of personal data and privacy, legislation on copyright, etc.

Some experiences of using *Mathematica* in the classroom

The potential of *Mathematica* for use in the classroom is immense. It is a program that is especially suitable for teaching mathematics to students who have not handled the program before: it has a large number of on-line and off-line aids, it provides predictive text for all the commands, it supports free text (queries made in English, which are "translated" by the program to appropriate commands), allows to reproduce literal mathematical expressions through the use of palettes, uses commands whose syntax is very similar to the problem to be solved, indicates the openings and closures of brackets and parentheses, includes a color code that highlights errors and distinguishes between commands, variables and unknown or erroneous expressions, offers explanations about misspelled expressions, etc.

Our experience with the use of *Mathematica* includes a wide variety of subjects. Concerning the Calculus, we have used *Mathematica* for the representation and study of functions of one and several variables, for differential and integral calculus, to study the continuity of a function and its asymptotes, for the resolution of equations by direct and numerical methods, for interpolation, for series development of functions, to get the error made with the approximations of a function in a point, to study contour lines, for the resolution of differential equations, etc.

Regarding the topics related to Algebra, we have used *Mathematica* in the classroom for the matrix analysis, for the resolution of systems of linear equations, to solve metric problems in the plane and space, for the representation of lines and planes and to determine their relative positions, for the representation and study of conics and quadrics, to solve geometric problems, in the diagonalization of endomorphisms, etc.

Regarding the topic of Discrete Mathematics, *Mathematica* has contributed to the resolution of logical and predicate problems, applications of number theory and modular arithmetic, representation and study of graphs and trees, representation and resolution of automata, combinatorial problems and counting, etc.

In addition to these "standard" topics, the existence of a *Mathematica* programming language has allowed us to carry out our own developments, to improve the understanding of mathematical concepts, and above all, to facilitate the visualization of them. In particular, the use of the "Manipulate" command, which allows the dynamic modification of various parameters associated with a graphical representation, has been of great interest. For example, Mathematica has been extended through its own developments for the simplification of Boolean functions; for solving equations and non-linear systems; for the progressive representation of functions of two variables from their intersections with plans of different orientation; for the study of relative positions of two or three straight lines on the plane; or for the study of relative positions of a plane and a straight line in space. (Nieto-Isidro & Ramos, 2016, 2017; Ramos & Nieto-Isidro, 2014, 2016).

Conclusions

In conclusion, we can say that the use of CAS should be a key aspect of the current practice of teaching mathematics in engineering. Teachers must be aware of the profound changes that the use of CAS can produce in our work and in our relationship with students, as well as the possible dangers of the inappropriate use of these tools. We must carefully design the role that the CAS plays, so that it becomes a useful support in the understanding of mathematical concepts and not only a tool for making tedious calculations. The potential for manipulation, visualization and graphic representation, together with the tremendous computing power of current CAS, is a tool of great importance for teachers, which allows us to explore new ways of teaching mathematics.

The task of mathematics teachers is to take full advantage of the possibilities offered by the use of CAS. The use of well-selected and relevant examples and cases will allow students a faster and deeper understanding of the relevant mathematical concepts in engineering education.

It should not be forgotten that two of the most important competencies that students achieve through the Mathematics curriculum are the analytical reasoning and the knowledge of the basics underlying the various mathematical techniques to solve the problems. Engineering students, as future inventors and innovators, need to know the basics, otherwise they will never know to choose the best mathematical technique for each problem and to make a critical analysis of the results.

References

Abichandani, P., Primerano, R., & Kam, M. (2010). *Symbolic scientific software skills for engineering students.* Transforming Engineering Education: Creating Interdisciplinary Skills for Complex Global Environments, IEEE, 1-26.

Alpers, B. A., Demlova, M., Fant, C.H., Gustafsson, T., Lawson, D., Mustoe, L., ... & Velichova, D. (2013). *A framework for mathematics curricula in engineering education:* a report of the mathematics working group. European Society for Engineering Education (SEFI).

Arcavi A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics,* 52(3), 215-241.

Berger, M. (2010). *Using CAS to solve a mathematics task: A deconstruction.* Computers & Education, 55(1), 320-332.

Duderstadt, J.J. (2010). *Engineering for a changing world.* In D. Grasso, M. Brown (Eds.) Holistic engineering education (pp. 17-35). Springer.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez, P. Boero (eds.) *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* Past, present and future, pp. 237-273. Sense Publishers.

García-Peñalvo, F.J., Colomo-Palacios, R., & Lytras, M.D. (2012). Outcomes of international research projects on technology applied to education. *Journal of Universal Computer Science*, 18(1), 1-4.

Gjonbalaj, Q. D., & Gjoka, L. (2018). Engineering Mathematics and Modern Technology. I*nternational Journal of Educational Technology*, 2(1), 8-13.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F. L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(1), 105-123.

Mureşan, M. (2017). *Manipulate.* In Introduction to Mathematica® with Applications (pp. 93-104). Springer International Publishing.

Heid, M K., & Blume, G.W. (2008). Technology and the development of algebraic understanding. In M.K. Heid & G.W. Blume (Eds.). Research on technology and the teaching and learning of mathematics: *Research syntheses* (Vol. 1), pp. 55–108. Information Age.

Hoyles, C. & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? *In Second international handbook of mathematics education,* pp. 323-349. Springer.

Hsi, S., Linn, M.C. & Bell, J.E. (1997). The role of spatial reasoning in engineering and the design of spatial instruction. *Journal of Engineering Education*, 86(2), 151–158.

Kumar, R. (2008). *Convergence of ICT and Education*. World Academy of Science, Engineering and Technology, 40, 556-559.

Lavicza, Z. (2007). Factors influencing the integration of Computer

Algebra Systems into university-level mathematics education. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 14(3), 121-129.

Lavicza, Z. (2010). *Integrating technology into mathematics teaching at the university level.* Zdm, 42(1), 105-119.

Liang, H.N. & Sedig, K. (2010). Can interactive visualization tools engage and support pre-university students in exploring non-trivial mathematical concepts? *Computers & Education,* 54(4), 972–991.

Marshall, N., Buteau, C., Jarvis, D.H., & Lavicza, Z. (2012). Do mathematicians integrate computer algebra systems in university teaching? Comparing a literature review to an international survey study. *Computers & Education*, 58(1), 423-434.

Mohammad, A.M. (2019). Students' attitude towards computer algebra systems (CAS) and their choice of using CAS in problem-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 50(3), 344-353.

Nieto-Isidro, S. & Ramos, H. (2016) Constructing extended Boolean functions from truth tables using the Mathematica system. 2016 *International Symposium on Computers in Education* (SIIE), pp. 1-6.

Nieto-Isidro, S., & Ramos, H. (2017) Use of a symbolic computation program to reinforce the spatial abilities of engineering students. IEEE *Revista Iberoamericana de Tecnologías del Aprendizaje* 12(1), 37-44.

Oliver, R. (2002). *The role of ICT in higher education for the 21st century: ICT as a change agent for education.* Proceedings of the Higher Education for the 21st Century Conference.

Ramos, H & Nieto-Isidro, S. (2014). Visualization of functions of two variables using Mathematica: (Exploring the pedagogical possibilities of the system beyond what is evident), *9th Iberian Conference on Information Systems and Technologies* (CISTI), Barcelona, pp. 1-6.

Ramos, H. & Nieto-Isidro, S. (2016). *Dynamic visualization of the* *relative position of straight lines on the plane using Mathematica.* Proceedings TEEM'16, pp. 831-838.

Smetana, L.K. & Bell, R.L. (2012). Computer simulations to support science instruction and learning: A critical review of the literature. *International Journal of Science Education*, 34(9), 1337–1370.

Toro, U. & Joshi, M. (2012). ICT in higher education: Review of Literature from the Period 2004-2011. *International Journal of Innovation, Management and Technology,* 3(1), 20-23.

Trott, M. (2004) *The Mathematica guidebook for graphics.* Springer-Verlag New York.

van der Wal, N.J., Bakker, A., & Drijvers, P. (2017). Which techno-mathematical literacies are essential for future engineers?. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 15(1), 87-104.

Varbanova, E. (2017). About Balanced Application of CAS in Undergraduate Mathematics. In I.S. Kotsireas and E. Martínez-Moro (eds.), *Applications of Computer Algebra, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* 198 (pp. 473-485). Springer.

Weiss, V., & Tobin, P. (2015). Use of calculators with computer algebra systems in test assessment in engineering mathematics. *ANZIAM Journal,* 57, 51-65.

Williams, J., & Wake, G. (2007). Black boxes in workplace mathematics. *Educational studies in mathematics*, 64(3), 317-343.

Wolfram, S. (1991) Mathematica: a system for doing mathematics by computer (2nd Edition). Addison Wesley Longman Publishing Co: Redwood City, CA, USA.

Zimmermann, W & Cunningham, S. (1991) *Editors' introduction: What is mathematical visualization.* In Visualization in teaching and learning mathematics, (pp. 1-7) Washington: Mathematical Association of America.

Sobre os Autores

Coordenadora

Carla Fidalgo, PhD em Matemática pela Universidade de Coimbra é professora do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra (ISEC). Foi presidente da Assembleia de Representantes do ISEC durante 13 anos, membro do Conselho Geral do IPC e do Conselho Consultivo do ISEC. É investigadora do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, cofundadora do Grupo de Investigação em Didática da Matemática na Engenharia (GIDiMatE), cofundadora do Centro de Apoio à Matemática na Engenharia (CeAMatE) e colaboradora do Centro de Inovação e Estudo da Pedagogia no Ensino Superior (CINEP). Foi membro de comités científicos de congressos nacionais e internacionais e é autora de várias publicações quer em Matemática Pura quer em Didática da Matemática.

Autores

Almeida, Maria Emília Bigotte de

Maria Emília Bigotte de Almeida, Licenciada em Matemática-Ramo Científico e mestre em Ciências da Computação pela Universidade de Coimbra. É Professora Adjunta no Departamento de Física e Matemática do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra do Instituto Politécnico de Coimbra. As suas áreas de interesse e investigação estão ligadas à Didática da Matemática, às Tecnologias Educativas, à Organização do Sistema Educativo e ao desenvolvimento de Ambientes de Vida Assistida, coordenando vários projetos nestas temáticas. Foi fundadora do CASPAE (IPSS), na qual exerce o cargo de Presidente da Direção desde 2000, ano da sua constituição, tendo por inerência de funções a Coordenação Pedagógica de todos os projetos desenvolvidos pela instituição, incluindo a formação de estágios e voluntários, em parceria com instituições de ensino superior.

Barbosa, Joaquim Infante

1. Habilitation on Structural Mechanics from the University of Évora, 2008, PhD in Mechanical Engineering from the Technical University of Lisboa, 1993, MSc in Mechanical Engineering from the Technical University of Lisboa, 1984, Licenciatura in Mechanical Engineering from the Technical University of Lisboa, 1975.

2. Jubilated Full Professor at the Instituto Superior de Engenharia de Lisboa (ISEL), Polytechnic Institute of Lisbon

3. Invited Full Professor (Retired) at the University of Évora

4. Senior Researcher at IDMEC/IST - Instituto de Engenharia Mecânica, unit of the associate laboratory LAETA – Laboratório Associado de Energia, Transportes e Aeronáutica Pólo IST – Instituto Superior Técnico, since 1992.

5. Member of CIMOSM - Research Center for Modeling and Optimization of Multifunctional Systems, ISEL - Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.

6. Over 40 years of teaching service at the Escola Superior Náutica Infante D. Henrique, at the University of Évora and at the Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Polytechnic Institute of Lisbon.

7. Published (Scopus data) 35 scientific articles with 405 citations and h-index = 14.

8. ORCID iD: http://orcid.org/0000-0002-8219-6435.

Branco, João Ricardo

João Ricardo Branco é professor no Instituto Superior de Engenharia de Coimbra, do Instituto Politécnico de Coimbra. É doutorado em Matemática Aplicada, com formação de base em Matemática e em Ciências da Engenharia Civil e com especialização em Análise Financeira. Tem dezenas publicações pedagógicas e científicas em revistas internacionais. As suas áreas de interesse e investigação são a educação matemática para engenheiros, finanças e os modelos matemáticos para difusão e proliferação de gliomas.

Carr, Michael

Dr. Michael Carr is a Senior Lecturer in Mathematics and Statistics in the College of Engineering and the Built Environment in Technological University Dublin. His research areas include the mathematical education of engineers, in particular problem-based learning and project-based learning, along with the development of core mathematical skills. He has over 70 published journal articles and conference papers, and has recently co-edited a book, "Calculus for Engineering Students".

Paula Carvalho

Licenciada em Matemática e Mestre em Ensino da Matemática, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra (FCTUC). Doutorada em Matemática na área de Geometria Combinatória, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Professora Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

.

É investigadora no Grupo de Otimização, Teoria dos Grafos e Combinatória do Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA) tendo publicados trabalhos científicos na área de Teoria Algébrica de Grafos e Combinatória.

Integra a linha temática MATEAS - Matemática: Ensino e Avaliação no ensino Superior e o grupo de investigação e desenvolvimento de software SIACUA - Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador da Universidade de Aveiro, integrados na U&D CIDMA, tendo publicado alguns trabalhos na área de Avaliação no Ensino (Superior).

Cruz, João Pedro

Doutorado em Matemática, é docente no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro onde leciona unidades curriculares da área da Matemática a diferentes cursos do 1º ciclo. Integra a linha temática MATEAS - Matemática: Ensino e Avaliação no Ensino Superior, da U&D CIDMA, onde faz parte da equipa de desenvolvimento do sistema MEGUA. Tem realizado trabalhos na área da matemática aplicada e também na vertente pedagógica com a publicação de trabalhos na área do Ensino da Matemática.

Descalço, Luís

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra (FCTUC), Mestre em Informática Pela Universidade do Minho e Doutorado em Matemática na área de Álgebra, pela Universidade de St Andrews, Escócia. Professor Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro. É investigadora no Grupo de Otimização, Teoria dos Grafos e Combinatória do Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA) tendo publicado trabalhos científicos nas áreas da Álgebra e Computação. Integra a linha temática MATEAS - Matemática: Ensino e Avaliação no ensino Superior e o grupo de investigação e desenvolvimento de software SIACUA - Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador da Universidade de Aveiro, integrados na U&D CIDMA, tendo publicado alguns trabalhos na área de Ensino e Avaliação no Ensino (Superior).

Fhloinn, Eabhnat Ní

Dr. Eabhnat Ní Fhloinn is an Associate Professor in the School of Mathematical Sciences in Dublin City University, and the Director of DCU Maths Learning Centre. She has undertaken this role since 2007; prior to this, she was Manager of DIT Maths Learning Centre for two years. Her PhD is in biometric cryptography from Trinity College Dublin, where she also undertook her BA in Mathematics. Her research interests now lie in the area of mathematics education. Dr. Ní Fhloinn was the inaugural Chairperson of the Irish Mathematics Learning Support Network (IMLSN) from 2009 – 2011 and served on the IMLSN committee until 2019. She is a member of CASTeL, the Centre for the Advancement of STEM Teaching and Learning in DCU.

Fidalgo, Carla

Carla Fidalgo, PhD em Matemática pela Universidade de Coimbra é professora do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra (ISEC). Foi presidente da Assembleia de Representantes do ISEC durante 13 anos, membro do Conselho Geral do IPC e do Conselho Consultivo do ISEC. É investigadora do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, cofundadora do Grupo de Investigação em Didática da Matemática na Engenharia (GIDiMatE), cofundadora do Centro de Apoio à Matemática na Engenharia (CeAMatE) e colaboradora do Centro de Inovação e Estudo da Pedagogia no Ensino Superior (CINEP). Foi membro de comités científicos de congressos nacionais e internacionais e é autora de várias publicações quer em Matemática Pura quer em Didática da Matemática.

Loja, Maria Amélia Ramos

M.A.R. Loja' academic background includes the Habilitation in Mechatronic Engineering by the University of Évora (UEvora) and a PhD in Mechanical Engineering, by the Technical University of Lisbon (IST).

She is presently Adjunct Professor at Mechanical Engineering Department of the Engineering Institute of Lisbon (ISEL, IPL, https://www.isel.pt/) and collaborates in the Mechatronics Engineering and Energy' Doctoral programme of the University of Évora (https://www.uevora.pt/).

She is integrated Senior Researcher of the Mechanical Engineering Institute (IDMEC, IST) and coordinates the Research Centre on Modelling and Optimization of Multifunctional Systems (CIMOSM, ISEL, http://cimosm.isel.pt/).

Her major areas of interest include the scientific areas of Computational Solids' Mechanics, Optimization and Reverse Engineering, among others.

She is the Chairperson of the ECCOMAS (https://www.eccomas.org/) thematic series of conferences SYMCOMP (International Conference on Numerical and Symbolic Computation: Developments and Applications).

Since 2017 she has been invited by European Commission Research Agencies to evaluate project proposals in different subjects related to her competences.

Orcid: http://orcid.org/0000-0002-4452-5840

Margalho, Luís

Luís Margalho é professor adjunto no Departamento de Física e Matemática do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra (ISEC/IPC). Licenciado em Matemática pela Universidade de Coimbra, Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade do Porto e Doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade do Minho. No ISEC, tem lecionado unidades curriculares de Análise de Dados, Probabilidades e Estatística, Análise Matemática e Análise Numérica. A sua atividade de investigação tem sido efetuada na área de modelos geo-estatísticos para dados espaço-temporais, com aplicações a dados do ambiente e da saúde.

Martins, Sandra Gaspar

Docente de Matemática no Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.

Licenciada em Matemática Pura pela Faculdade de CIências da Universidade de Lisboa. Mestre em Matemática Aplicada e Computação pelo Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa. Doutorada em Ciências da Educação na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Investigadora dedicada ao Ensino da Matemática no Ensino Superior: Utilização de Tecnologias no Ensino, Aprendizagem Activa, Utilização de quizzes para fomentar a aprendizagem, e Multidisciplinaridade na aprendizagem.

Nieto, Susana

Susana Nieto holds a PhD in Mathematical Sciences and is Professor in the Department of Applied Mathematics at the University of Salamanca. She is a research fellow of the Group of Educational Evaluation and Guidance, integrated within the excellence research group GRIAL (Interaction and eLearning Research Group) and a research fellow of the Institute of Educational Sciences of the University of Salamanca. Her research interests are currently focused on the teaching of mathematics at different educational levels, design and evaluation of training programs, and innovation for teaching and learning of mathematics, especially in engineering degrees.

Oliveira, Paula

Licenciada em Engenharia Geográfica, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Doutorada em Matemática na área de Análise Funcional, pela Universidade de Aveiro. Professora Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

É investigadora no Grupo História da Matemática e Educação Matemática do Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA).

Integra a linha temática MATEAS - Matemática: Ensino e Avaliação no ensino Superior integrado na U&D CIDMA, tendo publicado alguns trabalhos na área de Educação em Matemática. É coordenadora geral do Projecto Matemática Ensino da Universidade de Aveiro.

Ramos, Higinio

Prof. H. Ramos obtained the Extraordinary Award of the Faculty of Sciences at University of Salamanca, for his Thesis Master in Chebyshev spectral methods for solving second order initial value problems. He is currently Professor of Applied Mathematics at the Department of Applied Mathematics at the University of Salamanca and member of the Scientific Computer Group at this University. His scientific interests include numerical solution of initial value problems, procedures for numerical quadrature, rottfinding solvers, techniques of approximation, and in general, techniques of numerical analysis.

His interests also include how to teach mathematics, and he has participated in numerous teaching innovation projects.

Rodrigues, José Alberto

José Alberto Rodrigues holds a PhD in Mathematics by the University of Minho and is Adjunct Professor at Department of Mathematics of the Engineering Institute of Lisbon (ISEL, IPL). His main area of interest is applied mathematics and scientific computing.

He has publications devoted to mathematical modelling and numerical methods, more specifically in Isogeometric Analysis techniques, and didactic books devoted to Calculus and Numerical Analysis for undergraduate students.

He is a staff member of the Research Centre on Modelling an Optimization of Multifunctional Systems (CIMOSM, ISEL, http://cimosm.isel.pt/)

ORCID: 0000-0001-5630-7149

Seabra, Dina

Doutorada em Matemática, é docente na Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda da Universidade de Aveiro onde leciona unidades curriculares da área da Matemática a diferentes cursos do 1º ciclo.

Integra a linha temática MATEAS - Matemática: Ensino e Avaliação no ensino Superior e o grupo de investigação e desenvolvimento dos sistemas MEGUA e SIACUA, respetivamente, Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador da Universidade de Aveiro, integrados na U&D CIDMA.

Tem exercido cargos de gestão e atividades ligadas sobretudo à vertente pedagógica e publicado alguns trabalhos na área do Ensino da Matemática

Steele, Colin DC

Born 1964, Dundee, Scotland

BSc and PhD studies at University of St Andrews, Scotland.

PhD in mathematical modelling of Solar atmosphere "Equilibrium and Eruption of Solar Coronal Magnetic Structures"

UMIST, subsequently University of Manchester, since 1993. Current position, reader in Mathematics and Director of Service Teaching.

Specialising in organising and taking part in teaching mathematics to students in other schools/departments including Engineering and Foundation Year.

Interested in use of technology in teaching, computerised assessment, demonstrations, diagnostic testing, prevention of academic malpractice.

www.cinep.ipc.pt | cinep@ipc.pt

A coleção *Estratégias de Ensino e Sucesso Académico: Boas Práticas no Ensino Superior* valoriza a investigação aplicada e tem por objetivo divulgar estudos no âmbito da pedagogia, métodos pedagógicos inovadores, iniciativas promotoras do sucesso académico e projetos de intervenção desenvolvidos em cooperação entre instituições de ensino superior e organizações da comunidade.

Politécnico de Coimbra | cinep